Série A, n° 3921
N° d'ordre : 4772

# THÈSES

présentées

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

## LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

**Wladimir MERCOUROFF**

---

1re THÈSE : Etude de la bande de Valence du Germanium par résonance cyclotron

2me THÈSE : Propositions données par la Faculté

soutenues le 7 Juin 1962, devant la Commission d'Examen

**MM. WYART** Président
**ROCARD** } Examinateurs
**AIGRAIN** }

Série A, n° 3921
N° d'ordre : 4772

# THÈSES

présentées

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

## LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

**Wladimir MERCOUROFF**

---

1re THÈSE : Etude de la bande de Valence du Germanium par résonance cyclotron

2me THÈSE : Propositions données par la Faculté

soutenues le 7 Juin 1962, devant la Commission d'Examen

**MM. WYART** Président
**ROCARD** } Examinateurs
**AIGRAIN** }

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

## PROFESSEURS

Doyen . . . . . **M. ZAMANSKY**

| | | | |
|---|---|---|---|
| G. JULIA | T Analyse supérieure et Algèbre supérieure | JUNG | T Pétrographie |
| DE BROGLIE | T Théories physiques | TRILLAT | T Microscopie et diffraction électronique |
| PRENANT | T Anatomie et Histologie comparées | WIEMANN | T Chimie organique et struct. |
| GRASSE | T Evolution des êtres organisés | JACQUINOT | T Spectroscopie et Physique Céleste (Orsay) |
| PREVOST | T Chimie organique | VASSY | T Physique de l'Atmosphère |
| CHAUDRON | T Chimie appliquée | DESTOUCHES | T Théories Physiques |
| WYART | T Minéralogie et Cristallographie | AMIEL | T Chimie Générale |
| TEISSIER | T Zoologie | HOCART | T Minéralogie et Cristallographie |
| MANGENOT | T Biologie Vég. (Orsay) | J. P. MATHIEU | T Physique (Optique) |
| AUGER | T Physique quantique et Relativité | COUTEAUX | T Biologie Animale (P. C. B.) |
| MONNIER | T Physiologie Générale | MAY | T Zoologie (Orsay) |
| PIVETEAU | T Paléontologie | CHOQUET | T Théorie des fonctions et Topologie |
| ROCARD | T Physique (E. N. S.) | FELDMANN | T Biologie Végétale Marine |
| CARTAN | T Mathématiques (E. N. S.) | GUINIER | T Physique des Solides (Orsay) |
| LAFFITTE | T Chimie Générale | JOST | T Physiologie comparée |
| FAVARD | T Géométrie supérieure | FORTET | T Calcul des Probabilités et Physique Math. |
| COULOMB | T Physique du Globe | SCHWARTZ | T Calcul différentiel et Intégral |
| Mlle COUSIN | T Biologie Animale (S. P. C. N.) | CHOUARD | T Physiologie Végétale |
| CHRETIEN | T Chimie minérale | MALAVARD | T Aviation (Techn. Aéronaut.) |
| DRACH | T Zoologie | BRELOT | T Calcul différentiel et intégral |
| KASTLER | T Physique (E. N. S.) | NORMANT | T Synthèse organique générale |
| EPHRUSSI | T Génétique | BENARD | T Chimie Minérale |
| RIVIERE | T Géologie (S. P. C. N.) et sédim. | BUVAT | T Botanique (E. N. S.) |
| GAUTHERET | T Biologie Végétale (P. C. B.) | DUGUE | T Statistiques Mathématiques |
| LUCAS R. | T Recherches Physiques | SOULAIRAC | T Psychophysiologie |
| THOMAS A. | T Biologie cellulaire | ULRICH | T Physiologie Végétale |
| ARNULF | T Optique appliquée | MARECHAL | T Optique théorique et Appl. |
| MORAND | T Physique Enseignement | KIRRMANN | T Théories Chimiques |
| SOLEILLET | T Physique (P. C. B.) | CHADEFAUD | T Botanique |
| FORTIER | T Mécan. expérimentale des fluides | Mlle LE BRETON | T Physiologie de la Nutri. |
| DANJON | T Astronomie | SALEM | T Mathématiques générales |
| PETIT | T Biologie maritime | LELONG | T Applic. de l'analyse à la Géométrie |
| QUENEY | T Météorologie et dynamique atmosphérique | DEVILLERS | T Anatomie et Histologie comparées |
| GALLIEN | T Embryologie | EHRESMANN | T Topologie Algébrique |
| EICHHORN | T Botanique | FRANÇON | T Physique (S. P. C. N.) |
| DE CUGNAC | T Biologie Végétale (S. P. C. N.) | GLANGEAUD | T Géographie physique et géologie dynamique |
| Mlle CAUCHOIS | T Chimie Physique | GODEMENT | T Mathématiques (M. P. C.) |
| THELLIER | T Physique du Globe | PISOT | T Techn. Mathém. de la Phys. |
| L'HERITIER | T Biologie Générale (Orsay) | ROCH | T Géologie |
| GRIVET | T Radioélectricité (Orsay) | SCHATZMAN | T Astrophysique |
| PONCIN | T Mécanique Générale | TERMIER | T Paléontologie stratigraphique |
| DUBREIL | T Arithmétique et Théorie des Nombres | ZAMANSKY | T Mathématiques générales |
| QUELET | T Chimie Organique | LENNUIER | T Physique (M. G. P.) |
| CAGNIARD | T Géophysique appliquée | RIZET | T Génétique (Orsay) |
| CHAMPETIER | T Chimie Macromoléculaire | ROUTHIER | T Géologie appliquée |
| CUVILLIER | T Micropaléontologie | Mme TONNELAT | T Physique Théorique |

| | |
|---|---|
| DIXMIER | T Mathématiques (M. P. C.) |
| SOUCHAY | T Chimie générale |
| AIGRAIN | T Electrotechnique générale |
| BRUSSET | T Chimie systématique |
| M. LEVY | T Physique théor. des hautes Energies (Orsay) |
| Mme CHAIX | T Chimie biologique |
| Mme HUREL-PY | Biologie Végétale (P. C. B.) |
| PIAUX | T Chimie (M. P. C.) |
| BRUN | T Mécan. théorique des fluides |
| LEDERER | T Chimie biologique |
| Mme DUBREIL | T Mathématiques (Agrégation) |
| Mme LELONG | T Mathématiques (E. N. S.) |
| BELLAIR | T Géologie (S. P. C. N.) |
| COTTE | T Physique électricité |
| DUBOIS J. E. | T Chimie organique |
| LAMOTTE | T Zoologie (E. N. S.) |
| MICHEL A. | T Chimie Minérale (Orsay) |
| OLMER | T Energétique générale |
| ROUAULT | T Electricité (Orsay) |
| GAUTHIER | T Mécanique appliquée |
| BARCHEWITZ | T Chimie Physique |
| BROSSEL | T Physique atomique |
| BUSER | Physiologie comparée |
| CAMUS | Physiologie végétale (B. M. P. V.) |
| CASTAING | T Physique (Orsay) |
| CURIEN | T Minéralogie et Cristallographie |
| MOYSE | T Physiologie végét. (Orsay) |
| NOIROT | Evolution des êtres organisés |
| PANNETIER | T Chimie générale (Orsay) |
| POSSOMPES | T Zoologie |
| PULLMANN | T Chimie théorique |
| TEILLAC | T Physique Nucléaire et Radioactivité |
| TONNELAT | T Biologie physico-chim. |
| VILLE | T Econométrie |
| WILLEMART | Chimie (P. C. B.) |
| DODE | T Chimie (Orsay) |
| FREYMANN | T Recherches Physiques |
| GUINOCHET | T Biologie vég. (S. P. C. N.) (Orsay) |
| ROLLET | T Chimie (P. C. B.) |
| Mlle JOSIEN | T Chimie (S. P. C. N.) |
| CHEVALLEY | T Géomét. algébrique et théorie des groupes |
| ARNOULT | T Electronique (Orsay) |
| CHAPELLE | T Physique (Orsay) |
| DELANGE | T Mathématiques (Orsay) |
| DENY | T Mathématiques générales (Orsay) |
| GERMAIN | T Mécanique théorique des fluides |
| LUCAS G. | T Géologie |
| ALLARD | T Chimie Physique |
| BERTHELOT | T Physique fondamentale des hautes énergies (Orsay) |
| BRICARD | T Météorologie et Physique de l'Atmosphère |
| Mme ALBE-FESSARD | Psychophysiologie |
| FRIEDEL | Physique des Solides (Orsay) |
| M. JULIA | Etude des Moléculaires naturel. complexes |
| LENDER | Biologie Animale (S. P. C. N.) Orsay |
| MAGAT | Physico-chimie des radio-éléments |
| Mlle QUINTIN | T Electrochimie |
| MONOD | T Chimie du métabolisme |
| BENOIT | T Physiologie Animale (Orsay) |
| DE POSSEL | T Analyse numérique |
| CHARLOT | T Chimie analytique |
| HAISSINSKY | T Radiochimie |
| LEMEE | T Physiologie Végét. B. M. P. V. (Orsay) |
| GUERIN | T Chimie (M. P. C.) (Orsay) |
| CHATELET M. | Chimie (P. C. B.) |
| JEAN | T Physique Nucléaire (Orsay) |
| MATTLER | T Physique (S. P. C. N.) |
| MICHEL L. | Phys. théorique des Hautes Energ. (Orsay) |
| BERGERARD | Zoologie (Orsay) |
| BERTEIN | Electronique (Orsay) |
| BOUISSIERES | Chimie des Radioéléments (Orsay) |
| Mme COUTURE | Thermodynamique et Mécanique Physique |
| ELLENBERGER | Géologie appliquée s/ le terr. |
| FRANC | Biologie Animale (P. C. B.) |
| SCHNELL | Botanique tropicale (Orsay) |
| STOLKOWSKI | Physiologie générale |
| ACHER | Chimie Biol. (Orsay) |
| BAUDOIN | Biologie Animale (P. C. B.) |
| BEAUMONT | Biologie Animale (S. P. C. N.) |
| BLAMONT | Géophysique Ionosphère |
| BOURREAU | Botanique |
| CURIE D. | Physique (M. G. P.) |
| DURAND-DELGA | Géologie |
| FREON | T Chimie organique (Orsay) |
| HELLER | Physiologie végétale |
| TORTRAT | Calcul des Probabilités |
| CAILLEUX | Géologie (S. P. C. N.) |
| MAGNAN | T Physique (S. P. C. N.) |
| DAUDEL | T Mécanique Ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire |
| Mlle FOURCROY | Biologie Végétale (S. P. C. N.) |
| Mme CHOQUET-BRUHAT | T Mécanique Analytique et Mécanique Céleste |
| Mlle VEIL | Physiologie Cénérale |
| LWOFF | T Microbiologie |
| SIESTRUNCK | T Mécanique Physique et Expérimentale |
| LACOMBE | T Métallurgie des métaux nucléaires |
| BROCHARD | T Physique P. C. B. (Orsay) |
| CABANNES | T Mécanique générale |
| LESIEUR | T Mathématiques M. P. C. (Orsay) |
| MAZET | T Mécanique générale (Orsay) |
| CAIRE | Géographie Physique et Géol. dynamique |
| COMOLET | Mécanique des Fluides |
| CORABŒUF | Physiologie Animale |
| DELLOUE | Physique de l'Exosphère |
| GORENFLOT | Botanique II (Orsay) |
| HOUILLON | Biologie Animale (P. C. B.) |
| JULLIEN J. | Chimie (P. C. B.) |
| MALGRANGE | Tech. Math. de la Physique |
| OLIVIER | Antropologie |
| NOZERAN | T Botanique II (Orsay) |
| BLANC-LAPIERRE | Physique (E. N. S.) (Orsay) |

Secrétaire Général . . . . R. POULLAIN

A MA FEMME

Enfin, ai-je manqué d'adreffe
cu de bonheur ? Le Tems éclaircira
toutes ces queftions.

Abbé NOLLET

"Recherches sur les causes particulières
des phénomènes électriques" (1754).

Je remercie Monsieur le Professeur Y.ROCARD qui a bien voulu m'accueillir au Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure. Je remercie également Monsieur le Professeur P.AIGRAIN qui m'a suggéré le sujet de ce travail et m'a dirigé pendant sa réalisation. Je tiens également à remercier Monsieur PH.NOZIERES qui m'a amicalement guidé dans les calculs, Monsieur J.C.PICARD qui est à l'origine du travail expérimental, tous mes camarades du Laboratoire de Physique avec lesquels j'ai eu de nombreuses discussions, tous les techniciens du Laboratoire et surtout ceux des basses températures, Messieurs J.C.MARECHAL et G.PEYRES.

TABLE DES MATIERES

Page

Introduction ..... 1

Chapitre I - Théorie classique de la résonance cyclotron dans les semi-conducteurs ..... 3

1. Cas des charges libres ..... 3
2. Formulation à l'aide de la constante diélectrique ..... 6
3. Notion de masse effective ..... 7
4. Résonance cyclotron dans le cas des surfaces d'énergie constante ellipsoïdales ..... 9
5. Résonance cyclotron dans le cas général ..... 11
6. Utilisation de l'équation de Boltzmann ..... 13
7. Les effets de densité de porteurs ..... 14
8. Echauffement des porteurs ..... 16

Chapitre II - La bande de valence du germanium ..... 18

1. Forme de la bande de valence du germanium ..... 18
2. Théorie classique de la résonance cyclotron dans la bande de valence du germanium ..... 19
3. Etude de l'hypothèse $p_z = 0$ ; forme des raies ..... 21
4. Utilisation de l'équation de Boltzmann pour avoir la forme des raies ..... 22
5. Calcul de $m_c^*$ dans le cas général $p_z \neq 0$ ..... 25

Chapitre III - Théorie quantique de la résonance cyclotron ..... 27

1. Cas des bandes sphériques ou ellipsoïdales ..... 27
2. Théorie quantique de la résonance cyclotron dans la bande de valence du germanium ..... 30
3. Etude de l'hypothèse $p_B = 0$ ..... 37
4. Calcul général ..... 38

Page

Chapitre IV - Dispositif expérimental et résultats ..... 41

1. Considérations générales ..... 41
2. Induction magnétique ..... 42
3. Basses températures ; cryostat ..... 44
4. Circuit hyperfréquence ..... 45
5. Modulation lumineuse ; démodulation basse fréquence ..... 50
6. Résultats expérimentaux ..... 54

Chapitre V - Essai d'interprétation des résultats expérimentaux .... 60

1. But recherché. Résultats antérieurs ..... 60
2. Détermination des paramètres de la bande de valence du germanium à partir des raies "classiques" ..... 61
3. Identification des raies observées ..... 63

Conclusion ..... 65

Appendice - Calcul classique de $m_c^{**}$ en fonction de $x = 2 m_o E/p_B^2$ ... 66

1. Discussion de la nature des sections ..... 66
2. Masses effectives et densité d'état aux valeurs limites de x ..... 69
3. Calcul général pour les trois directions principales ..... 72
4. Masses effectives limites le long d'un contour dans un plan (110) ..... 72

Tableau I ..... 76

Tableau II ..... 77

Bibliographie ..... 78

# INTRODUCTION

Une particule chargée de masse m et de charge e placée dans une induction $\vec{B}$ décrit dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$ des cercles avec une pulsation "cyclotron"

$$\omega_c = \frac{e\,B}{m} \quad .$$

Si on applique un champ électrique alternatif de pulsation $\omega$, ce champ sera absorbé si $\omega_c = \omega$ : c'est la résonance cyclotron.

L'application de la résonance cyclotron à l'étude des gaz ionisés est connue depuis longtemps ; mais son utilisation pour l'étude des solides est assez récente : elle a été proposée en 1951 par Dorfman [1] et par Dingle [2] puis par Shockley [3]; ce dernier suggéra qu'il serait possible d'observer la résonance cyclotron dans le germanium très pur, à très basse température (quelques degrés K) et à des fréquences centimétriques. Les premières expériences de ce type dans le germanium et le silicium sont dues à Dresselhaus, Kip et Kittel [4] et à Dexter, Zeiger et Lax [5].

Depuis, en modifiant ou en perfectionnant les techniques (basses températures, fréquences millimétriques ou dans le domaine infra-rouge, inductions magnétiques élevées, etc.), elles ont été étendues à d'autres semi-conducteurs et à certains métaux. On trouvera une analyse et une bibliographie complète concernant ces questions dans l'article de revue de Lax et Mavroides [6].

Nous nous sommes attachés à l'étude de la résonance cyclotron des porteurs de la bande de valence du germanium. Par suite de la forme complexe de surfaces d'énergie constante("sphères gondolées") et à la dégénérescence à $\vec{p} = 0$ de la bande de valence, les résultats sont plus complexes que pour une bande simple. Dans le Chapitre I, nous passons rapidement en revue la théorie classique de la résonance cyclotron, et les méthodes générales utilisables pour son étude théorique. Le Chapitre II est consacré plus spécialement à la bande de valence du germanium, et aux résultats que l'on peut attendre à partir d'une théorie classique. Ces résultats sont repris du point de vue

quantique dans le Chapitre III ; dans le cas d'une bande simple, ils sont équivalents aux résultats classiques ; cependant, dans le cas d'une bande dégénérée comme la bande de valence du germanium, il apparaît des résultats nouveaux aux faibles nombres quantiques : en particulier, les niveaux ne sont pas équidistants et doivent donner naissance à une structure fine pour les résonances de trous ; c'est ce que l'on appelle "les effets quantiques". Un spectrographe à 8 mm de longueur d'onde a été construit pour l'étude de ces effets : il est décrit, ainsi que les résultats expérimentaux obtenus, dans le Chapitre IV. Enfin, le Chapitre V est consacré à un essai d'interprétation numérique de ces résultats expérimentaux.

## Chapitre I

## THEORIE CLASSIQUE DE LA RESONANCE CYCLOTRON DANS LES SEMI-CONDUCTEURS

### I -1. Cas des charges libres.

Soient N particules de charge e et de masse m, placées dans une induction $\vec{B}$ et un champ électrique alternatif $\vec{\mathcal{E}}$ de pulsation $\omega$. Si on suppose les particules indépendantes et si on néglige l'effet de l'induction magnétique alternative, l'équation du mouvement d'une particule est :

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau}\right) = e\vec{\mathcal{E}} + e\,\vec{v} \wedge \vec{B} \quad , \qquad (I,1,1)$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule, et $\tau$ le temps de relaxation supposé indépendant de la vitesse. En prenant l'induction $\vec{B}$ constante dirigée suivant Oz et le champ $\vec{\mathcal{E}}$ dirigé suivant Ox $(\mathcal{E}_o\, e^{i\omega t}, 0, 0)$, la composante de $\vec{v}$ dépendant du temps avec la pulsation $\omega$ est donnée par les équations :

$$\begin{cases} m\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) v_x = e\,\mathcal{E}_o + e\,v_y\,B \quad , \\ m\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) v_y = -e\,v_x\,B \quad . \end{cases} \qquad (I,1,2)$$

On peut résoudre par rapport à $v_x$ ; si on appelle $\omega_c = \frac{eB}{m}$ la pulsation cyclotron, et si on pose :

$$\begin{cases} \nu = \omega\,\tau \quad , \\ \nu_c = \omega_c\,\tau \quad , \end{cases} \qquad (I,1,3)$$

on trouve :

$$v_x = \left(\frac{e\tau}{m}\right)\mathcal{E}_o\,\frac{1 + i\,\nu}{1 + (\nu_c^2 - \nu^2) + 2\,i\,\nu} \quad ; \qquad (I,1,4)$$

la conductivité complexe est

$$\sigma_x = N e \frac{v_x}{\mathcal{E}_o} = \sigma_o \frac{1 + i\nu}{1 + (\nu_c^2 - \nu^2) + 2 i \nu} , \qquad (I,1,5)$$

où $\sigma_o = \frac{N e^2 \tau}{m}$ est la conductivité en courant continu.

Les pertes sont données par :

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{R}e\, \vec{J} . \vec{\mathcal{E}}^* , \qquad (I,1,6)$$

($\vec{J} = N e \vec{v}$, densité de courant, et $\vec{\mathcal{E}}^*$ complexe conjugué de $\vec{\mathcal{E}}$ ). On a donc :

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{R}e\, \sigma_x \mathcal{E}_o^2 = \sigma_o \mathcal{E}_o^2 \frac{1 + \nu^2 + \nu_c^2}{(1 + \nu_c^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2} . \qquad (I,1,7)$$

Cette fonction est représentée pour diverses valeurs de $\nu = \omega \tau$ (fig. 1). On voit qu'en faisant varier B, les pertes passent par un maximum pour $\omega_c = \frac{e B_c}{m} \approx \omega$ , et que ce maximum est d'autant plus voisin de $\omega$ que $\nu$ est plus grand. Cette résonance n'apparaît pratiquement que pour

$$\nu = \omega \tau > 1 , \qquad (I,1,8)$$

et ce paramètre mesure la surtension de la résonance :

$$\nu = 2 \frac{\omega_c}{\Delta \omega_c} = 2 \frac{B_c}{\Delta B_c} , \qquad (I,1,9)$$

où $\Delta B_c$ est la largeur à mi-hauteur de la résonance.

La condition précédente peut s'interpréter de la manière suivante : pour avoir une absorption cohérente, il faut que la particule fasse au moins une révolution de 1 radian avant de subir une collision qui la désoriente. On peut encore exprimer cette condition en introduisant la mobilité $\mu = \frac{e\tau}{m}$ ; on a

$$\mu > \frac{e}{m} \frac{1}{\omega} \qquad (I,1,8')$$

ou, à résonance

$$\mu B_c > 1 . \qquad (I,1,8'')$$

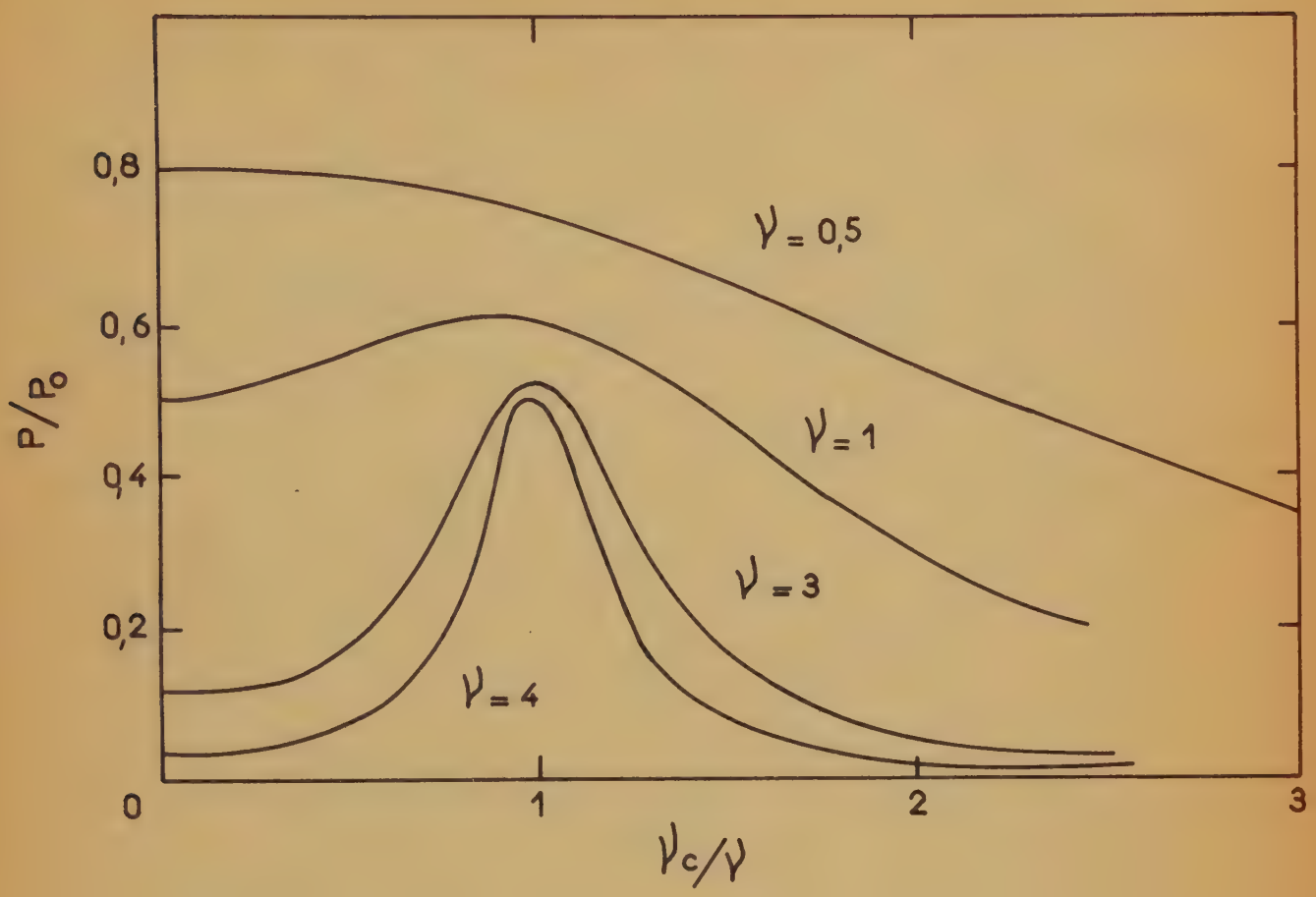



FIG. 1

VARIATION DE L'ABSORPTION EN FONCTION DE $\nu_c/\nu$ POUR DIFFERENTES VALEURS DE $\nu$

Cas d'une polarisation circulaire

Les équations (I,1,2) peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} (1 + i\nu)(v_x + iv_y) = \dfrac{e\tau}{m}\,\mathcal{E}_o - i\nu_c(v_x + iv_y) \\ (1 - i\nu)(v_x - iv_y) = \dfrac{e\tau}{m}\,\mathcal{E}_o - i\nu_c(v_x - iv_y)\ , \end{cases} \qquad (I,1,2')$$

ce qui signifie que $\vec{\mathcal{E}}$ peut être décomposé en deux champs $\vec{\mathcal{E}}_+$ et $\vec{\mathcal{E}}_-$, polarisés circulairement tournant en sens inverse :

$$\mathcal{E}_+ \begin{cases} \mathcal{E}_x + i\,\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_o \\ \mathcal{E}_x - i\,\mathcal{E}_y = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{E}_- \begin{cases} \mathcal{E}_x + i\,\mathcal{E}_y = 0 \\ \mathcal{E}_x - i\,\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_o\ . \end{cases} \qquad (I,1,10)$$

Pour chacun de ces champs, on a

$$\begin{cases} \sigma_+ = \sigma_x + i\,\sigma_y = N e \dfrac{v_+}{\mathcal{E}_+} = \dfrac{\sigma_o}{1 + i(\nu + \nu_c)} \\ \sigma_- = \sigma_x - i\,\sigma_y = N e \dfrac{v_-}{\mathcal{E}_-} = \dfrac{\sigma_o}{1 + i(\nu - \nu_c)}\ . \end{cases} \qquad (I,1,11)$$

Les pertes sont proportionnelles à la partie réelle de la conductivité, soient respectivement

$$\begin{cases} P_+ \sim R_e\,\sigma_+ = \dfrac{\sigma_o}{1 + (\nu + \nu_c)^2} \\ P_- \sim R_e\,\sigma_- = \dfrac{\sigma_o}{1 + (\nu - \nu_c)^2}\ . \end{cases} \qquad (I,1,12)$$

On voit donc qu'à la résonance, seule une des polarisations est absorbée ; la polarisation absorbée dépend du signe de $\nu_c$, c'est-à-dire du signe de e : en effet, le sens de rotation des particules autour de $\vec{B}$ dépend du signe de leur charge, et on conçoit que seule soit absorbée la polarisation de même sens que ce sens de rotation. En utilisant une polarisation circulaire pure, on peut ainsi déterminer le signe de la charge.

## I - 2. Formulation à l'aide de la constante diélectrique

On peut tenir compte de l'effet du mouvement des particules en introduisant dans les équations de Maxwell une constante diélectrique effective $\mathcal{E}$ :

$$\nabla^2 \mathcal{E} = -\mathcal{E} \frac{\omega^2 \mathcal{E}}{c^2} = -\frac{\omega^2 \mathcal{E}}{c^2} \left(K - \frac{i\sigma}{\omega \mathcal{E}_0}\right) \qquad (I,2,1)$$

où K est la constante diélectrique statique, et $\sigma$ la conductivité complexe (équation de Appleton et Hartree). On peut faire apparaître dans $\mathcal{E}$ les parties réelle $\mathcal{E}'$ et imaginaire $\mathcal{E}''$, ou encore l'angle de pertes $\delta$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' - i\mathcal{E}'' = \mathcal{E}' (1 - i \operatorname{tg} \delta) \quad . \qquad (I,2,2)$$

A l'aide des formules (I,1,5) et (I,1,11), on trouve :

$$\mathcal{E} = K \left(1 - i \frac{\nu_p^2}{\nu} \frac{1 + i\nu}{1 + 2i\nu + (\nu_c^2 - \nu^2)}\right) \quad , \qquad (I,2,3)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}' = K \left(1 + \dfrac{\nu_p^2 (\nu_c^2 - \nu^2 - 1)}{(1 + \nu_c^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2}\right) \quad , \\ \mathcal{E}'' = K \dfrac{\nu_p^2}{\nu} \dfrac{1 + \nu + \nu_c^2}{(1 + \nu_c^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2} \quad , \\ \operatorname{tg} \delta = \dfrac{\nu_p^2 (\nu_c^2 + \nu^2 + 1)}{\nu \left[(1 + \nu_c^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 + \nu_p^2 (\nu_c^2 - \nu^2 - 1)\right]} \quad , \end{cases} \qquad (I,2,3')$$

pour une polarisation linéaire, et :

$$\mathcal{E} = K \left(1 - i \frac{\nu_p^2}{\nu} \frac{1}{1 + i(\nu \pm \nu_c)}\right) \quad , \qquad (I,2,4)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}'_{\pm} = K \left(1 + \dfrac{\nu_p^2}{\nu} \dfrac{\nu \pm \nu_c}{1 + (\nu \pm \nu_c)^2}\right) \quad , \\ \mathcal{E}''_{\pm} = K \dfrac{\nu_p^2}{\nu} \dfrac{1}{1 + (\nu \pm \nu_c)^2} \quad , \\ \operatorname{tg} \delta_{\pm} = \dfrac{\nu_p^2}{1 + (\nu \pm \nu_c)^2 \quad \nu + (\nu \pm \nu_c)\nu_p^2} \quad , \end{cases} \qquad (I,2,4')$$

pour une polarisation circulaire ; on a posé :

$$\nu_p^2 = \omega_p^2 \tau^2 = \frac{N e^2}{\varepsilon_0 K m^*} \tau^2 = \frac{\sigma_0 \tau}{\varepsilon_0 K} \qquad (I,2,5)$$

et $\omega_p$ désigne la pulsation de résonance plasma.

On voit donc que l'absorption est toujours accompagnée de dispersion, et ceci peut amener des difficultés du point de vue expérimental (voir plus bas : Chapitre IV).

## I - 3. Notion de masse effective

Dans les calculs précédents, nous avons introduit la masse m des particules supposées libres et indépendantes ; l'énergie E d'une particule est alors reliée à sa quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ par la relation

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad . \qquad (I,3,1)$$

Les électrons dans un solide ne sont pas libres ; ils sont soumis au champ périodique cristallin et à un potentiel moyen dû à leurs interactions d'une part, et aux forces extérieures que l'on peut considérer comme des perturbations d'autre part. En l'absence de forces extérieures, leur énergie est une certaine fonction $E = E(\hbar\vec{k})$ du moment cristallin $\vec{k}$, qui exprime l'effet des potentiels internes. Par analogie avec le théorème d'Ehrenfest, on peut montrer que leur mouvement en présence de forces extérieures $\vec{F}$ est donné par le hamiltonien

$$\mathcal{H} = E(\vec{p}) + U \qquad (I,3,2)$$

où U est le potentiel dont dérivent les forces extérieures seules ; autrement dit, $\hbar\vec{k}$ joue le rôle de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ de la particule libre (*). On peut encore dire que l'équation du mouvement est :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad . \qquad (I,3,3)$$

---

(*) On peut montrer que, si les forces extérieures comportent une induction magnétique $\vec{B}$ dérivant d'un potentiel vecteur $\vec{A}$, les équations du mouvement sont obtenues en remplaçant $\hbar\vec{k}$ par $\vec{p} - e\vec{A}$. Nous le ferons en étudiant la résonance cyclotron du point de vue quantique, où on tient compte explicitement de $\vec{B}$.

Pour revenir à une image classique, il faut considérer le mouvement d'un paquet d'électrons dont la vitesse de groupe est $\vec{v}_g = \vec{\nabla}_{\vec{p}} E$ . Si les électrons ont des moments voisins de $\vec{p}_o$ et des énergies voisines de $E_o$ , on peut développer E au voisinage de $\vec{p}_o$ en fonction de $\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_o$ :

$$E = E_o + \left(\frac{\partial E}{\partial p_x}\right)_o \Delta p_x + \left(\frac{\partial E}{\partial p_y}\right)_o \Delta p_y + \left(\frac{\partial E}{\partial p_z}\right)_o \Delta p_z +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial p_x^2}\right)_o \Delta p_x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial p_y^2}\right)_o \Delta p_y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial p_z^2}\right)_o \Delta p_z^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 E}{\partial p_y \partial p_z}\right)_o \Delta p_y \Delta p_z + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial p_z \partial p_x}\right)_o \Delta p_z \Delta p_x + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial p_x \partial p_y}\right)_o \Delta p_x \Delta p_y \qquad (I,3,4)$$

En calculant $\vec{v}_g$ et en combinant avec l'équation (I,3,3), on trouve :

$$\frac{d\vec{v}_g}{dt} = \left(\frac{1}{m^*}\right) \vec{F} \qquad (I,3,5)$$

ou encore

$$m^* \frac{d\vec{v}_g}{dt} = \vec{F} \qquad (I,3,5')$$

où $\left(\frac{1}{m^*}\right)$ désigne le tenseur de composantes

$$\left(\frac{1}{m}\right)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j}\right)_o \qquad (I,3,6)$$

et $m^*$ le tenseur inverse du précédent. Par analogie avec l'équation de Newton, le tenseur $m^*$ est appelé le tenseur de masse effective des électrons ; en particulier, quand $E(\vec{p})$ est isotrope, $m^*$ est un scalaire, et tout se passe comme si les particules étaient libres avec une masse différente de leur masse réelle. Dans le cas général, la masse effective est un tenseur $m^*$ qui permet de tenir compte du potentiel interne en gardant aux équations du mouvement une forme analogue à celle des équations classiques.

La masse effective $m^*$ ne dépend que des dérivées secondes de E ; c'est donc une fonction de la courbure des surfaces d'énergie constante, et il est facile de vérifier que plus la courbure est grande plus la masse effective est faible.

Dans les semi-conducteurs, on s'intéresse aux électrons situés aux limites de bandes permises (bas de la bande de conduction et sommet de la bande de valence). L'énergie y est maximum ou minimum ; si un développement du type (I,3,4) est possible, on dit que la bande est ellipsoïdale (en effet, au second ordre, E est une forme quadratique du moment $\vec{p}$) ; il existe alors un tenseur de masse effective que l'on peut diagonaliser. Cependant, un tel développement n'est pas toujours possible (c'est en particulier le cas de la bande de valence du germanium) ; on ne peut pas définir de tenseur de masse effective ; pour étudier la résonance cyclotron, il faut utiliser une méthode plus générale (voir § I,5).

Remarque - Si l'énergie présente un maximum, ses dérivées secondes sont négatives et la masse effective est négative (ou plutôt, toutes ses composantes le sont). On préfère garder une masse positive, mais changer le signe de la charge. C'est en particulier le cas de la bande de valence des semi-conducteurs : au sommet de cette bande, la masse effective des électrons est négative, mais on préfère parler de porteurs de masse positive et de charge positive que l'on appelle "des trous". Ces trous correspondent d'ailleurs aux lacunes laissées par les électrons, qui se déplacent en sens opposé au mouvement global des électrons.

## I- 4. Résonance cyclotron dans le cas des surfaces d'énergie constante ellipsoïdales

Il y a alors un tenseur de masse effective. L'équation du mouvement d'une particule placée dans une induction $\vec{B}$ et un champ électrique $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp i\omega t$, est :

$$\vec{m}^* \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau}\right) = e\vec{\mathcal{E}} + e\,\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad . \qquad (I,4,1)$$

La composante de $\vec{v}$ dépendant du temps avec une pulsation $\omega$ est donnée par :

$$\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) \vec{m}^* \vec{v} = e\left(\vec{\mathcal{E}}_0 + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \qquad . \qquad (I,4,2)$$

On peut en déduire le tenseur de conductivité $\sigma$ à partir de

$$\vec{J} = N e \vec{v} = \vec{\sigma}\,\vec{\mathcal{E}}_0 \quad , \qquad (I,4,3)$$

où N est le nombre total de particules, et $\vec{J}$ la densité de courant donnée par :

$$\vec{J} = N e^2 \tau \frac{\frac{\tau e}{|m^*|} \vec{\mathcal{E}}_o \wedge (\overrightarrow{m^*}.\vec{B}) + \frac{\tau^2 e^2}{m^*} \frac{\vec{B}(\vec{\mathcal{E}}_o \cdot \vec{B})}{1 + i\nu} + (\frac{\overrightarrow{1}}{m^*} \vec{\mathcal{E}}_o)(1 + i\nu)}{(1 + i\nu)^2 + e^2 \tau^2 (\frac{\vec{B} \cdot \overrightarrow{m^*} \vec{B}}{|m^*|})}, \quad (I,4,4)$$

$|m^*| = m_1 m_2 m_3$ est le déterminant du tenseur de masse effective (les trois composantes principales étant $m_1, m_2, m_3$). La puissance absorbée $P = \frac{1}{2} \mathcal{R}e\, \vec{J}.\vec{\mathcal{E}}_o^*$, et le tenseur de conductivité peuvent être calculés à partir de cette formule ; ces expressions se trouvent dans la référence (7), et nous ne les reproduirons pas ici. Nous ferons simplement deux remarques :

1) Ici aussi, la résonance n'est résolue que si $\nu = \omega\tau > 1$ ; en rendant alors minimum le dénominateur, on trouve la pulsation de résonance

$$\omega_c = e \sqrt{\frac{\vec{B} \cdot \overrightarrow{m^*} \cdot \vec{B}}{|m^*|}} \quad (I,4,5)$$

ou encore

$$\omega_c = e B \sqrt{\frac{m_1 \alpha_1^2 + m_2 \alpha_2^2 + m_3 \alpha_3^2}{m_1 m_2 m_3}} \quad (I,4,5')$$

où $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ sont les cosinus directeurs de $\vec{B}$ par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde masse effective. On peut donc définir une masse effective "cyclotron" :

$$m_c^* = \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 \alpha_1^2 + m_2 \alpha_2^2 + m_3 \alpha_3^2}} \quad (I,4,6)$$

qui dépend de l'orientation relative de l'induction magnétique et des axes cristallographiques du semi-conducteur.

En particulier, si l'extremum de E ne se produit pas en $\vec{p} = 0$, par suite des symétries cristallines, il peut se produire en plusieurs points équivalents. L'orientation relative de l'induction magnétique par rapport aux ellipsoïdes de masse effective de chacune de ces vallées équivalentes peut être différente, et pour une direction donnée, on peut avoir plusieurs masses cyclotron.

2) Dans le cas isotrope, il n'y a pas de résonance si $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{B}$ sont parallèles (le mouvement parallèle à $\vec{B}$ est découplé de $\vec{B}$. Dans le cas où les surfaces d'énergie constante sont ellipsoïdales, il peut y avoir résonance ;

en effet, en multipliant l'équation

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\,\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad (I,4,7)$$

par $\vec{B}$, on voit que la composante $p_B$ de $\vec{p}$ suivant $\vec{B}$ ne change pas ; de plus, l'énergie reste également constante ; le mouvement dans l'espace des moments est donc une ellipse section d'un ellipsoïde d'énergie constante par un plan perpendiculaire à $\vec{B}$. En revenant à l'espace des coordonnées, ce mouvement est encore elliptique, mais situé dans un plan qui n'est plus perpendiculaire à $\vec{B}$ en général. Si $\vec{\mathcal{E}}$ est parallèle à $\vec{B}$, il possède une composante dans le plan du mouvement, ce qui lui permet de se coupler à ce mouvement.

De plus, le mouvement des particules étant elliptique, il peut être décomposé en deux mouvements circulaires de sens opposés et d'amplitudes différentes : il y a donc absorption des deux composantes circulaires du champ électrique, avec des intensités différentes naturellement. Le calcul de l'intensité de l'absorption a été fait [4] et nous ne le reproduirons pas ici.

## I - 5. Résonance cyclotron dans le cas général

Si on ne peut pas définir de tenseur de masse effective, la masse cyclotron est plus difficile à déterminer ; mais on peut alors appliquer une méthode géométrique directe connue sous le nom de la méthode des tubes de Shockley [8].

Nous avons déjà remarqué que l'induction $\vec{B}$ ne modifie ni la composante $p_B$ du moment suivant $\vec{B}$, ni l'énergie de la particule. Le mouvement dans l'espace des moments d'une particule ayant un moment initial $p_B$ et une énergie E se produit dans une région limitée à $dp_B$ au voisinage de $p_B$ et à dE au voisinage de E ; cette région est appelée un "tube" (Fig. 2). De plus $p_x/\sqrt{eB}$ et $p_y/\sqrt{eB}$ sont des variables conjuguées [9] ; un théorème de mécanique classique (voir par exemple la formule (49,6) de la référence 10) donne alors la période du mouvement :

$$T = \frac{1}{e\,B}\,\frac{\partial S}{\partial E} \qquad (I,5,1)$$

où $S(E,p_B) = \int dp_x dp_y$ est la surface de la section d'une surface d'énergie constante E par un plan $p_B = C^{te}$ ; la masse cyclotron est donc

$$m_c^{*} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial S(E,p_B)}{\partial E} \quad . \qquad (I,5,2)$$

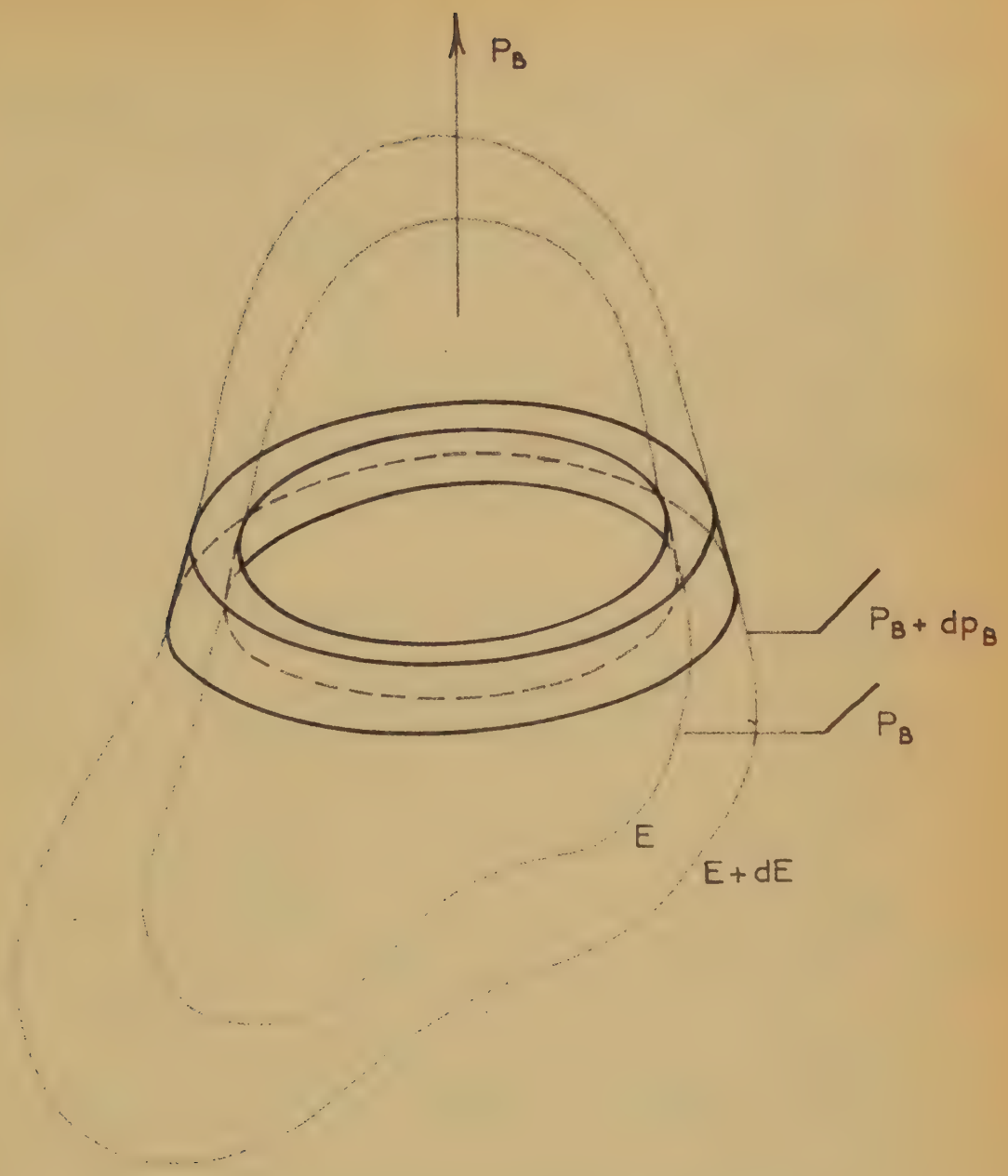



FIG. 2

TUBE DE SHOCKLEY

Dans le cas général, cette masse dépend non seulement de l'orientation de $\vec{B}$, mais aussi de $p_B$ et de E.

Si on choisit des coordonnées cylindriques $(\rho, \varphi, p_z)$, Oz étant dirigé suivant B, on peut écrire :

$$S = \frac{1}{2} \oint \rho^2 \, d\varphi \quad , \qquad (I,5,3)$$

ou, en dérivant par rapport à E sous le signe $\int$ :

$$m_c^* = \frac{1}{\pi} \oint \frac{\rho \, d\varphi}{\frac{\partial E}{\partial \rho}} \quad . \qquad (I,5,4)$$

Au voisinage d'une limite de bande, on peut limiter E à un développement du second ordre en $\vec{p}$. A un changement d'origine des énergies près, l'énergie est donc une fonction homogène du second degré par rapport à $\vec{p}$ (*); on peut donc écrire :

$$E(\lambda \rho, \lambda p_z, \varphi) = \lambda^2 E(\rho, p_z, \varphi) \quad . \qquad (I,5,5)$$

Si on pose $x = 2 m_o E / p_z^2$ ($m_o$ : masse de l'électron) et $y = \rho / p_z$ , l'équation des surfaces d'énergie constante devient :

$$x = f(y, \varphi) \quad . \qquad (I,5,6)$$

On trouve alors facilement [11] :

$$m_c^* = \frac{m_o}{\pi} \frac{d\Sigma}{dx} \qquad (I,5,7)$$

où $\Sigma$ est la section des surfaces réduites (I,5,6) par un plan $x = Cte$ :

$$\Sigma(x) = \frac{1}{2} \oint y^2 \, d\varphi \quad . \qquad (I,5,8)$$

On voit donc que $m_c^*$ est une fonction de $x = \frac{2 m E}{p_z^2}$ seulement.

On a donc en général une distribution de masses effectives. Pour déterminer la forme des raies d'absorption, il faut calculer la densité $dN/dm_c^*$ de porteurs ayant une masse cyclotron $m_c^*$ . Or le nombre de porteurs de masse $m_c^*$ est proportionnel au volume du tube de Shockley correspondant, ce qui donne en tenant compte du spin :

---

(*) Nous supposons ici que l'extremum se produit à $\vec{p} = 0$ ; la généralisation est immédiate.

$$dN = \frac{1}{4\pi^3} f(E)\, dV = \frac{1}{4\pi^3} f(E) \frac{\partial S}{\partial E}\, dE\, dp_B \qquad (I,5,9)$$

où $f(E)$ est le nombre de porteurs ayant l'énergie E à dE près. Dans les semi-conducteurs non dégénérés, $f(E)$ peut être remplacé par une fonction de distribution de Boltzmann $f(E) = A \exp -E/kT$ ; le coefficient A peut être déterminé en écrivant que le nombre total de porteurs est N.

Dans l'hypothèse envisagée plus haut, on a :

$$\frac{dN}{dm_c^*} = \frac{1}{2\pi^2} f(E)\, dE\, m_c^* \frac{dp_B}{dm_c^*} = -\frac{1}{4\pi^2} f(E) \sqrt{2m_o E} \frac{m_c^*(x)}{x^{3/2}} \frac{1}{\frac{dm_c^*}{dx}} \quad . \quad (I,5,10)$$

Comme $m_c^*$ ne dépend que de x, on peut intégrer sur E, et on trouve :

$$\frac{dN}{dm_c^*} \sim \frac{m_c^*}{x^{3/2} \left(\frac{dm_c^*}{dx}\right)} \quad . \qquad (I,5,11)$$

## I - 6. Utilisation de l'équation de Boltzmann

La méthode précédente ne tient pas compte de la présence d'un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ et ne donne pas la conductivité de manière analogue au cas où il existe un tenseur de masse effective. Le problème est alors beaucoup plus complexe : il peut cependant être résolu à l'aide de l'équation de Boltzmann[12].

Celle-ci peut s'écire :

$$e(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{\nabla}_p f + \vec{v}.\vec{\nabla}_r f + \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{f - f_o}{\tau} \quad , \qquad (I,6,1)$$

où $f(\vec{p}, \vec{r}, t, \vec{B}, \vec{\mathcal{E}})$ est la fonction de distribution normalisée de manière à ce que $\int f.dp = N$ ; $\vec{v} = \vec{\nabla}_p E(\vec{p})$ et $f_o$ la fonction de distribution en l'absence de $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{B}$. Le temps de relaxation $\tau$ peut dépendre de l'énergie.

Si la distribution est uniforme, $\vec{\nabla}_r f = 0$ ; si $\vec{\mathcal{E}}$ dépend sinusoïdalement du temps, on peut écrire f sous la forme :

$$f = f_o + \mathcal{I}\, \partial f_o / \partial E$$

où $\mathcal{I}$ dépend du temps avec une pulsation $\omega$. On a alors :

$$\vec{\nabla}_{\vec{p}} f = \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_o - \vec{\nabla}_{\vec{p}} \left( \mathcal{E} \frac{\partial f_o}{\partial E} \right) \simeq \frac{\partial f_o}{\partial E} \vec{\nabla}_{\vec{p}} E - \frac{\partial f_o}{\partial E} \vec{\nabla}_{\vec{p}} \mathcal{E} \qquad (I,6,2)$$

(le terme $\mathcal{E} \vec{\nabla}_{\vec{p}} \frac{\partial f_o}{\partial E}$ est négligeable devant le terme $\frac{\partial f_o}{\partial E} \vec{\nabla}_{\vec{p}} E$). D'où l'équation :

$$\tau e \vec{\mathcal{E}} . \vec{v} - \tau e (\vec{v} \wedge \vec{B}) \vec{\nabla}_{\vec{p}} \mathcal{E} - (1 + j \omega \tau) \mathcal{E} = 0 \qquad (I,6,3)$$

(on pourrait, si besoin est, ajouter dans cette équation des termes de création et d'annihilation de porteurs). Le courant dû à la distribution perturbée est alors :

$$\vec{J} = e \int f . \vec{v} . d\vec{p} = - e \int \frac{\partial f_o}{\partial E} \mathcal{E} \vec{v} . d\vec{p} \quad . \qquad (I,6,4)$$

Si le semi-conducteur n'est pas dégénéré, on peut remplacer la fonction de distribution de Fermi qu'il faudrait utiliser en toute rigueur, par une fonction de distribution de Boltzmann $f(E) = A \exp -E/kT$ , où A est déterminé de manière à ce que $\int f_o \, d\vec{p} = N$ : on a alors $\partial f_o / \partial E = -f_o / kT$ . Connaissant $E(\vec{p})$ et le temps de relaxation, on peut donc calculer l'absorption en fonction de $\vec{B}$.

## I - 7. Les effets de densité de porteurs.

L'augmentation de la densité de porteurs apporte en général des effets parasites à la résonance cyclotron. Sans entrer dans le détail de ces effets, nous allons les énumérer rapidement :

1) Profondeur de pénétration - Le champ électrique alternatif ne pénètre dans un matériau conducteur que sur la profondeur de la couche de peau :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_o \sigma \omega}} \quad . \qquad (I,7,1)$$

La conductivité $\sigma$ est proportionnelle à la densité N de porteurs. Pour un échantillon donné, ceci impose une limite supérieure à la densité de porteurs, de manière à ce que les dimensions de l'échantillon soient inférieures à la profondeur d'effet de peau.

2) Effet d'anomalie de constante diélectrique - Les formules (I,2,3) et (I,2,4) donnent la constante diélectrique complexe effective. La résonance cyclotron apparaît comme une résonance sur la partie imaginaire $\varepsilon''$ de $\varepsilon$ ;

cependant, on mesure expérimentalement la variation de la tangente de l'angle de perte $tg\,\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ ; celle-ci ne reproduira la variation de $\varepsilon''$ que si $\varepsilon'$ reste sensiblement voisin de la constante diélectrique statique K. On voit sur les formules (I,2,3) et (I,2,4) que ceci est réalisé, si

$$\nu_p^2 \ll \nu \qquad (I,7,2)$$

(où $\nu_p = \omega_p \tau$ , et $\omega_p^2 = \dfrac{N e^2}{\varepsilon_0 K m^*}$ est la pulsation de plasma).

3) Effets de plasma [4][13]. Quand nous avons établi les équations de la résonance cyclotron au §I, 1, le champ électrique que nous avons introduit était le champ auquel sont soumis les porteurs ; ce champ interne $\vec{\mathcal{E}}_i$ n'est pas le champ $\vec{\mathcal{E}}$ appliqué à l'échantillon, mais ce champ modifié par les effets de dépolarisation. Si on suppose, pour simplifier, que l'échantillon est de révolution autour de la direction du champ appliqué, on a :

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \vec{\mathcal{E}} - L\vec{P} \qquad (I,7,3)$$

où L est le facteur dépolarisant, et $\vec{P}$ la polarisation. En régime sinusoïdal :

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_i + N e \int \vec{v}\, dt = \chi \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_i - \frac{i N e \vec{v}}{\omega} \qquad (I,7,4)$$

($\chi = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(K-1)$ est la susceptibilité diélectrique), de sorte que

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \frac{\vec{\mathcal{E}} + \dfrac{i L N e \vec{v}}{\omega}}{1 + L(K-1)} \quad . \qquad (I,7,5)$$

L'équation du mouvement des particules devient :

$$\left[ i\left(\nu - \frac{\nu_p'^2}{\nu}\right) + 1 \right] \vec{v} = \frac{e\tau}{m} \frac{\vec{\mathcal{E}}}{1 + L(K-1)} + \nu_c \, \vec{v} \wedge \frac{\vec{B}}{B} \quad . \qquad (I,7,6)$$

Elle est analogue à l'équation où l'on ne tient pas compte des effets dépolarisants, au remplacement de $\nu$ par $\nu - \dfrac{\nu_p'^2}{\nu}$ près $\left(\nu_p'^2 = \dfrac{L K}{1 + L(K-1)}\ \nu_p^2\right)$ .

Mais l'allure des résultats peut être très différentes si $\nu_p'^2$ devient comparable à $\nu$, les résonances pouvant être déplacées, ou même de nouvelles résonances pouvant apparaître [4][13].

Pour éviter ces effets parasites, on voit qu'il faut $\nu \gg \nu_p'^2$ . Mais K étant assez grand (K = 16 pour le germanium) et L de l'ordre de l'unité (sauf pour des formes très particulières comme des disques très plats), $\nu_p'^2$ est de l'ordre de $\nu_p^2$, de sorte que la condition pratique est encore la condition (I,7,2) :

$$\nu_p^2 \ll \nu \quad . \qquad (I,7,2)$$

I - 8. Echauffement des porteurs

Les porteurs qui résonnent à la fréquence $\omega_c$ absorbent de l'énergie au champ électrique. A la résonance, entre deux collisions, le champ électrique (supposé à polarisation circulaire) tourne à la même fréquence que les porteurs et en phase avec eux : tout se passe donc commesi les porteurs n'étaient soumis qu'à un champ électrique continu d'intensité égale à l'amplitude de la polarisation circulaire absorbée.

Si l'énergie absorbée par les porteurs n'est recédée au réseau que partiellement, leur énergie moyenne augmente. Si les chocsélectron-électron sont assez efficaces pour thermaliser les porteurs, on peut définir une température électronique $T_e$ (hypothèse des électrons chauds) ; la condition pour qu'on puisse définir $T_e$ a été établie par Frölich et Paranjape [14] :

$$N > \frac{1}{4\pi} \frac{E^{3/2} m^{*3/2} \gamma^2 K^2}{kT e^4 \tau} \qquad (I,8,1)$$

où E est l'énergie des porteurs, $\gamma$ la vitesse du son dans le cristal, K la constante diélectrique et T la température du réseau. Dans le germanium ($K \simeq 16$ , $\gamma = 3.10^3$ m/s , $m^* \simeq 0,1\ m_o$ , on a $N > 10^8$ électrons/cm$^3$ à 4°K).

Si les collisions prédominantes sont dues aux phonons acoustiques (les seuls importants à basse température), on peut calculer la température électronique ; ceci a été fait par Bok [15] qui trouve :

$$\frac{T_e}{T}\left(\frac{T_e}{T} - 1\right) = \frac{e^2 \tau^2 \mathcal{E}^2}{2 m^{*2} \gamma^2} \quad . \qquad (I,8,2)$$

Dans ce calcul, les collisions avec les impuretés sont négligées ; ces collisions sont inefficaces pour le transfert d'énergie (le rapport de transfert d'énergie est de l'ordre de $m^*/M$ où M est la masse de l'impureté, soit $10^{-6}$ environ) : cependant, elles sont aussi efficaces que les collisions avec les

phonons pour la relaxation des moments, et c'est cette dernière qui fixe la largeur des raies. On peut modifier le calcul pour tenir compte du temps de relaxation $\tau_p$ de l'énergie par chocs contre les phonons : en effet, le porteur absorbe pendant le temps $\tau$ une énergie $e^2\tau\mathcal{E}^2/2m^*$, et la restitue au bout d'un temps $\tau_p$ au réseau par l'intermédiaire des phonons ; on a donc :

$$\frac{T_e}{T}\left(\frac{T_e}{T} - 1\right) = \frac{e^2 \tau \tau_p \mathcal{E}^2}{2 m^{*2} \gamma^2} \quad ; \qquad (I,8,3)$$

cette formule est à utiliser si $\tau > \tau_p$. On peut évaluer $\tau_p$ en extrapolant les résultats expérimentaux donnant la mobilité des porteurs à la température ordinaire pour des semi-conducteurs purs (les collisions sont alors uniquement dues aux phonons). Par exemple, pour les électrons dans le germanium, le temps de relaxation varie comme $T^{-3/2}$, de sorte que

$$\tau_p^- = \tau_{300°K} \left(\frac{300}{T}\right)^{3/2} \simeq 10^{-12} \left(\frac{300}{T}\right)^{3/2} \quad ; \qquad (I,8,4)$$

pour les trous, on a de même :

$$\tau_p^+ = \tau_{300°K} \left(\frac{300}{T}\right)^{2,3} \simeq 10^{-12} \left(\frac{300}{T}\right)^{2,3} \quad . \qquad (I,8,5)$$

Remarquons que la formule (I,8,3) montre que, à température donnée ($T$ et $\tau_p$ fixées), l'échauffement est d'autant plus facile que l'échantillon est plus pur.

## Chapitre II

## LA BANDE DE VALENCE DU GERMANIUM

### II - 1. Forme de la bande de valence du germanium

La bande de valence du germanium a été étudiée par Herman [16], Shockley [17], Dresselhaus, Kip et Kittel [4], et Kane [18]. On sait que cette bande a un extremum en $\vec{p} = 0$ ; en ce point, elle serait triplement dégénérée (six fois dégénérée si on tient compte des deux valeurs possibles du spin électronique), en l'absence de couplage spin-orbite ; mais celui-ci lève partiellement cette dégénérescence : il y a une bande $(V_1V_2)$ quatre fois dégénérée en $\vec{p} = 0$, et une bande $(V_3)$ doublement dégénérée dont le sommet est située à une énergie $\Delta$ en dessous du sommet de la bande $(V_1V_2)$ (Fig.3). Herman [16] a montré que les fonctions d'ondes au sommet de la bande de valence sont voisines d'orbitales-P ; la bande $(V_1V_2)$ correspond à $J = 3/2$ (doublet) et la bande $(V_3)$ à $J = 1/2$ (singulet). La bande $(V_1V_2)$ peut être considérée comme découplée de la bande $(V_3)$, dans la mesure où $\Delta$ est petit devant la bande interdite.

En appliquant une méthode de perturbation, Dresselhaus, Kip et Kittel [4] ont établi la forme de la bande $(V_1V_2)$. Pour chaque valeur de $\vec{p}$, il y a deux valeurs possibles de l'énergie E ; au second ordre près en $\vec{p}$, l'énergie peut se mettre sous la forme

$$2\, m_o E(\vec{p}) = A\, p^2 \pm \sqrt{B^2\, p^4 + C^2(p_y^2\, p_z^2 + p_z^2\, p_x^2 + p_x^2\, p_y^2)} \quad ; \quad (II,1,1)$$

le signe - correspond à la bande supérieure $V_1$ et le signe + à la bande inférieure $V_2$. Les surfaces d'énergie correspondantes ne sont pas sphériques, mais ont une forme de "sphères gondolées" (Fig.4) ; la bande $V_1$ est d'ailleurs plus anisotrope que la bande $V_2$.

Les coefficients A, B et C peuvent être exprimés en fonctions d'autres coefficients F, G, $H_1$ et $H_2$ qui expriment l'effet de différentes représentations sur la bande de valence [4] (Voir Tableau I) :

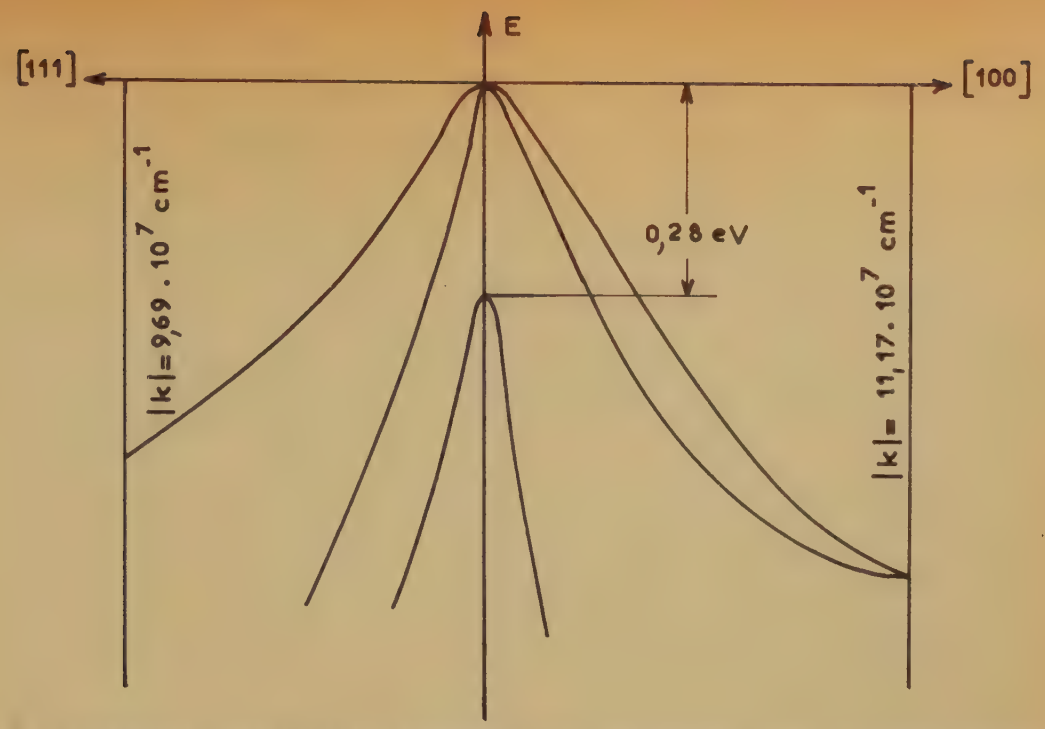



FIG. 3; ENERGIE DANS LA BANDE DE VALENCE DU GERMANIUM EN FONCTION DU VECTEUR D'ONDE $\vec{k}$ ( d'après H.Brooks, Advances in Electronics and Electron Physics, Vol·7, Académic Press, 1955 )

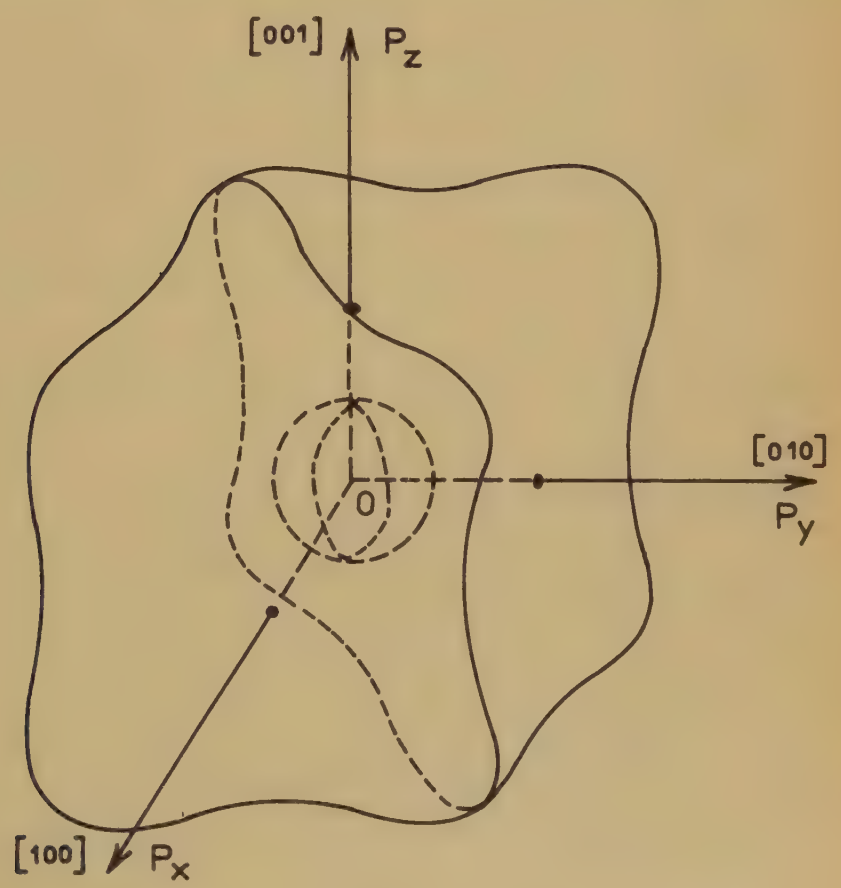



FIG. 4; FORME DES SURFACES D'ENERGIE CONSTANTE DE LA BANDE DE VALENCE DU GERMANIUM ( en trait fin, la section par un plan [110] )

F représente l'effet de la représentation $\Gamma_2^-$

G " " " " $\Gamma_{12}^-$

$H_1$ " " " " $\Gamma_{15}^-$

$H_2$ " " " " $\Gamma_{25}^-$ .

Il semble d'ailleurs que le coefficient $H_2$ puisse être négligé par suite de l'éloignement de $\Gamma_{25}^-$ [4].

Kane a étudié [18] les effets non paraboliques au voisinage de $\vec{p} = 0$ ; comme ces effets traduisent la perturbation apportée par la bande $(V_3)$ sur $(V_1 V_2)$, ils n'apparaissent qu'à des énergies de l'ordre de l'énergie $\Delta$. Dans le germanium, $\Delta \simeq 0{,}28$ eV ; cette valeur est beaucoup plus grande que l'énergie cyclotron $\hbar\omega_c \simeq 10^{-3}$ eV (pour des fréquences millimétriques) ; les effets non paraboliques peuvent donc être négligés pour la résonance cyclotron.

## II - 2. Théorie classique de la résonance cyclotron dans la bande de valence du germanium.

On peut calculer la masse effective cyclotron des porteurs dans la bande de valence du germanium par la méthode des tubes de Shockley (cf. § I.5).

Si on prend $\vec{B}$ dans un plan (110) faisant un angle $\theta$ avec l'axe (100), Oz dirigé suivant $\vec{B}$ et Ox et Oy symétriques par rapport au plan (110) (Fig.5), les surfaces d'énergie constante prennent la forme

$$
\begin{aligned}
2m_0 E = \frac{A}{2}\left(p_+^2+p_-^2+2p_z^2\right) \pm \Bigg\{ & \frac{B^2}{4}\left(p_-^2+p_-^2\right)^2 + \frac{C^2}{16}\left[\left(p_-^2+p_-^2\right)^2+\left(1-3\cos^2\theta\right)\left(2p_-^2+\left(\cos^2\theta-1\right)p_+^2\right)\right] \\
& - p_z \frac{C^2}{2\sqrt{2}} \sin\theta.\cos\theta \left[3p_-^2+\left(3C^2-2\right)p_+^2\right] p_+ \\
& + p_z^2 \left[B^2\left(p_+^2+p_-^2\right)+\frac{C^2}{4}\left(3\cos^2\theta-1\right)\left(p_+^2\left(3\cos^2\theta-2\right)+p_-^2\right)\right] \\
& + p_z^3 \frac{C^2}{\sqrt{2}} \sin\theta.\cos\theta \left(3\cos^2\theta-1\right)p_+ \\
& + p_z^4 \left[\frac{C^2}{4}\left(1-\cos^2\theta\right)\left(3\cos^2\theta+1\right)+B^2\right] \Bigg\}^{1/2}
\end{aligned}
\qquad (II,2,1)
$$

où

$$
\begin{cases} p_+ = p_x + p_y \\ p_- = p_x - p_y \end{cases} \qquad (I,2,2)
$$

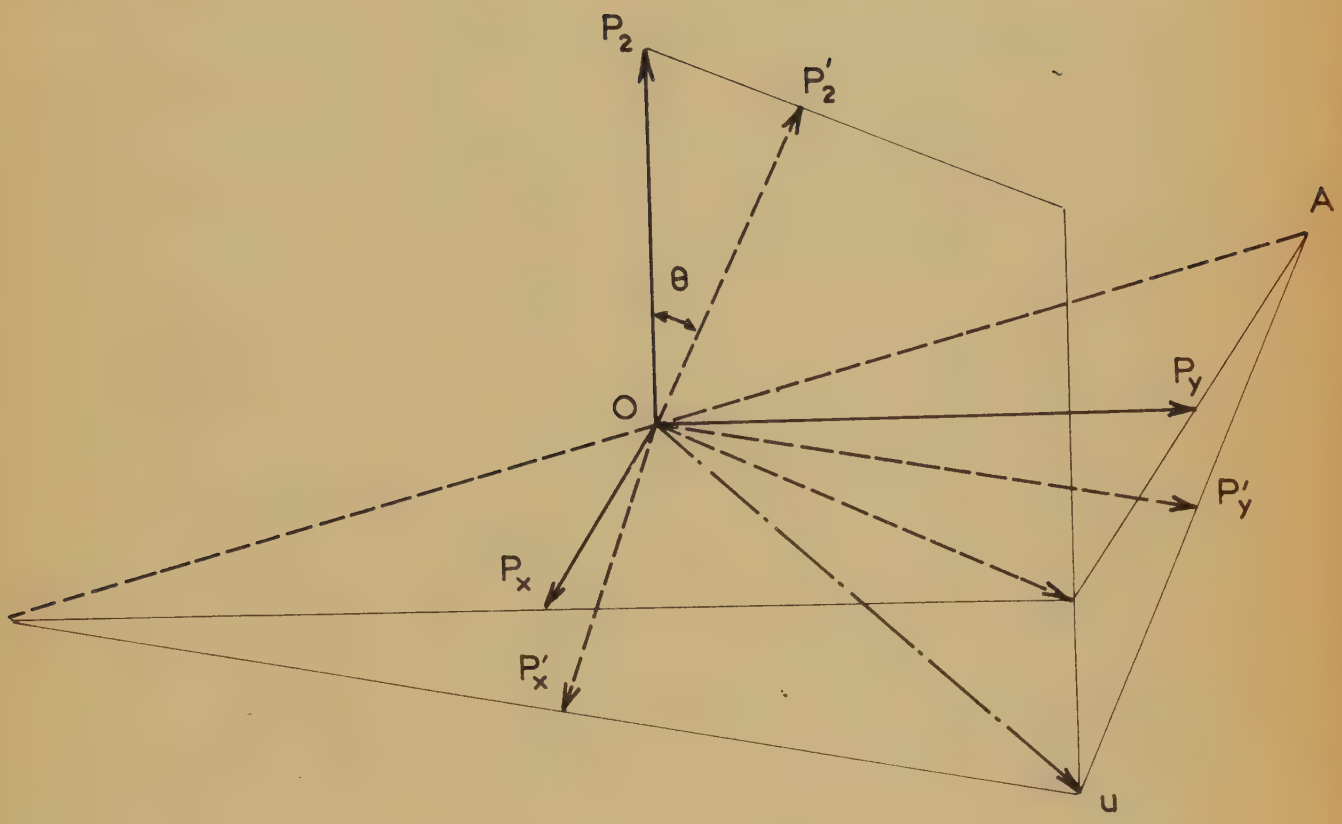



FIG.5

ROTATION DES AXES DE COORDONNEES AVEC OP' FAISANT UN ANGLE θ AVEC L'AXE [100] DANS UN PLAN [110]

En passant en coordonnées cylindriques $(\rho, \varphi, p_z)$ (l'axe polaire Ou est dans le plan (110)), on a $p_+ = \rho\sqrt{2}\cos\varphi$ et $p_- = \rho\sqrt{2}\sin\varphi$, et on obtient :

$$2m_0 E = A(\rho^2 + p_z^2) \pm \rho^2 \left[ g_0(\varphi) + g_1(\varphi)(p_-/\rho) + g_2(\varphi)(p_z/\rho)^2 + g_3(\varphi)(p_z/\rho)^3 + g_4(p_z/\rho)^4 \right]^{1/2} \qquad (II,2,3)$$

où

$$\begin{cases} g_0(\varphi) = B^2 + \frac{C^2}{4}\left[1+\cos^2\varphi\,(1-3\cos^2\theta)\left(\cos^2\varphi\,(\cos^2\theta-3)+2\right)\right] \\ g_1(\varphi) = \frac{C^2}{2}\sin 2\theta\left[4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi + (1-3\cos^2\theta)\cos^3\varphi\right] \\ g_2(\varphi) = 2B^2 + \frac{C^2}{2}(3\cos^2\theta - 1)\left[1+3\cos^2\varphi\,(\cos^2\theta - 1)\right] \\ g_3(\varphi) = \frac{C^2}{2}\sin 2\theta\,(3\cos^2\theta - 1)\cos\varphi \\ g_4 = B^2 + \frac{C^2}{4}(1-\cos^2\theta)(3\cos^2\theta + 1) \end{cases} \qquad (II,2,4)$$

On a alors

$$S(E, p_z) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\, d\varphi \qquad (II,2,5)$$

où $\rho$ est donné par l'équation implicite précédente.

On ne sait pas faire le calcul dans le cas général. Dans le cas où $p_z = 0$, le calcul est facile :

$$S(E, p_z=0) = 2\,m_0 \int_0^{2\pi} \frac{E\, d\varphi}{\left(A \pm g_0\right)^{1/2}} \quad , \qquad (II,2,6)$$

d'où

$$m_0^* = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{m_0}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A \pm \sqrt{B^2 + \frac{C^2}{4}\left(1 + h(\varphi)\right)}} \qquad (II,2,7)$$

avec

$$h(\varphi) = \cos^2\theta\,(1 - 3\cos^2\theta)\left(\cos^2\varphi\,(\cos^2\theta - 3) + 2\right) \quad .$$

On peut calculer cette intégrale en développant le radical par rapport à $h(\varphi)$ ; on trouve :

$$m_o^* = \frac{m_o}{A \pm \left[B^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2\right]^{1/2}} \left[1 \pm \frac{C^2 \Theta}{16\left(B^2 + \frac{C^2}{4}\right)^{1/2}\left[A \pm \left(B^2 + \frac{C^2}{4}\right)^{1/2}\right]} \pm \dots\right] \qquad (II,2,8)$$

où

$$\Theta = \left[\frac{1 - 3\cos^2\theta}{2}\right]^2 . \qquad (II,2,9)$$

Il y a donc deux masses possibles : $m_-^*$ correspondant à des trous "lourds" dans la bande $V_1$ et $m_+^*$ correspondant à des trous "légers" dans la bande $V_2$. L'anisotropie est assez faible pour les trous légers, plus marquée pour les trous lourds (ce qui est en rapport avec l'anisotropie des deux bandes $V_1$ et $V_2$, cf. § II.1). Les termes d'ordre supérieur apportent des corrections négligeables pour les trous légers, moins négligeables pour les trous lourds.

## II - 3. Etude de l'hypothèse $p_z = 0$

Le calcul de masse effective précédent n'est justifié que si la densité $dN/dm_c^*$ de porteurs de masses effectives $m^*$ est grande à $p_z = 0$. Nous avons vu que si l'énergie est une fonction homogène du second ordre de $\vec{p}$, on pouvait introduire les variables réduites $x = 2m_oE/p_z^2$ et $y = \rho/p_z$ ; $m_c^*$ est alors donné par :

$$m_c^*(x) = \frac{m_o}{\pi}\frac{d\Sigma}{dx} \qquad (II,3,1)$$

où

$$\Sigma = \frac{1}{2}\oint y^2\, d\varphi \qquad (II,3,2)$$

et où y est donné par l'équation réduite :

$$x = A(1+y^2) \pm \left[g_o y^4 + g_1 Y^2 + g_3 y + g_4\right]^{1/2} . \qquad (II,3,3)$$

Le cas $p_z = 0$ correspond à $x = \infty$ ; en ce point, y est équivalent à $\sqrt{x}$ et on peut développer y et $\Sigma$ par rapport à $\sqrt{x}$ ; mais les surfaces d'énergie constante ayant un centre de symétrie, $\Sigma$ est une fonction paire de $\sqrt{x}$ et son développement ne fait donc intervenir que x :

$$(x) = \pi\left(m_o^* x + m_1^* + \frac{m_2^*}{x} + \dots\right) \qquad (II,3,4)$$

où

$$m_o^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{A \pm g_o^{1/2}} . \qquad (II,3,5)$$

Il en résulte que

$$m_c^{*} = m_o^{*} - \frac{m_2^{*}}{x^2} + \dots \qquad (II,3,6)$$

et

$$\frac{dN}{dm_c^{*}} \sim \left(\frac{2m_o^{*}}{m_2^{*}}\right) x^{3/2} + \dots \quad . \qquad (II,3,7)$$

La densité est donc fortement divergente pour $p_z = 0$ (elle varie comme $1/p_z^3$), ce qui justifie le calcul de $m_c^{*}$ à $p_z = 0$ ; remarquons que ceci tient à l'existence d'un centre de symétrie.

Il est possible que $m_c^{*}(x)$ soit extremum en dehors de $p_z = 0$ . La densité y sera encore infinie ($dm_c^{*}/dx = 0$), mais moins divergente (comme $1/(p_z^o - p_z)$ ). Cependant on peut avoir une raie correspondant à cet extremum.

De manière générale, on peut calculer la forme de la raie en calculant la conductivité complexe :

$$\sigma = \frac{c^2}{\dots} \int \frac{dN}{m^{*}(E,p_z)(\omega - \frac{1}{\tau}) - eB} = \frac{e^2}{2\pi^2 i} \iint \frac{f(E)\, dE\, dp_z}{\nu - i - \nu_c(E,p_z)}$$

$$= -\frac{e^2 \tau}{2\pi^2 i} \int f(E)\, \sqrt{2m_o E}\, dE \int \frac{dx}{x^{3/2}\left[\nu - \nu_c(x) - i\right]} \qquad (II,3,8)$$

où $\nu_c(x) = \frac{eB\,\tau}{m_c^{*}(x)}$ . Mais le calcul général demande la connaissance complète de $m_c^{*}(x)$ et non seulement son développement au voisinage de $x = \infty$ . On peut cependant affirmer que les raies principales (correspondant à $p_z = 0$) seront probablement déformées dans un sens donné par le signe de $m_2^{*}$ ; nous ne ferons pas le calcul de $m_2^{*}$ (possible, mais pénible), car on peut obtenir cette déformation à partir de l'équation de Boltzmann (voir § II.4).

## II - 4. Utilisation de l'équation de Boltzmann pour avoir la forme des raies

Nous allons suivre ici les calculs développés par Zeiger, Lax et Dexter [19]. On peut mettre les surfaces d'énergie constante sous la forme

$$E = \frac{p^2}{2\langle m_1 \rangle}\left[1 + g\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)\right] \quad , \qquad (II,4,1)$$

où $\langle m_1 \rangle = \left[A \pm \left(B^2 + \frac{C^2}{\dots}\right)^{1/2}\right]^{-1}$ est une masse moyenne, et $g\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)$ est un petit

terme non sphérique qui n'est fonction que de l'orientation de $\vec{p}$ :

$$g\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) = \pm \langle m_\pm \rangle \left(B^2 + \frac{C^2}{6}\right)^{1/2} \left\{ \left[ 1 - \frac{C^2}{2\left(B^2 + \frac{C^2}{6}\right)} \frac{p_x^4 + p_y^4 + p_z^4 - \frac{2}{3} p^4}{p^4} \right] - 1 \right\} ; \qquad (II,4,2)$$

$g\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)$ est choisi de manière à être le plus petit possible. On peut alors développer $g\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)$ en ne gardant que le premier terme :

$$g\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) \simeq D_\pm \left[ \left(\frac{p_x}{p}\right)^4 + \left(\frac{p_y}{p}\right)^4 + \left(\frac{p_z}{p}\right)^4 - \frac{2}{3} \right] \qquad (II,4,3)$$

où

$$D_\pm = \frac{\pm C^2 \langle m_\pm \rangle}{4 \left(B^2 + \frac{C^2}{6}\right)^{1/2}} .$$

On peut alors écrire la fonction $\mathbb{F}$ introduite dans le § I.6 sous la forme $\mathbb{F} = \chi(\psi, \varphi) \frac{p_0 \tau}{\langle m_\pm \rangle}$, où $\tau$ est supposé indépendant de l'énergie et $(\psi, \varphi, p)$ sont les coordonnées sphériques de $\vec{p}$. On peut développer $\chi$ en série de Fourier par rapport à $\varphi$ :

$$\chi = \sum_n \left[ \chi_n(\psi) \cos n\varphi + \chi_{-n}(\psi) \sin n\varphi \right] . \qquad (II,4,4)$$

On est alors conduit à des équations linéaires où, au premier ordre en $g$, seuls $\chi_n$ et $\chi_{-n}$ sont couplés. La formule (I,6,4) donne alors la puissance absorbée :

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \int \vec{\mathcal{E}} \frac{\partial f_0}{\partial E} \chi p \frac{e\tau}{\langle m_\pm \rangle} \vec{v}_\perp dp . \qquad (II,4,5)$$

Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs que l'on peut trouver dans la référence (19) ; les résultats en sont les suivants :

1) Les effets sur les trous légers sont négligeables : nous avons déjà remarqué que la bande $V_2$ est presque sphérique ;

2) La fréquence de résonance fondamentale est donnée par

$$\omega_c = \frac{eB}{\langle m_\pm \rangle} \left\{ 1 + \frac{D_\pm}{16} \left[ 9 \cos^4\theta - 6 \cos^2\theta - \frac{5}{3} + 7(1 + 10 \cos^2\theta - 15 \cos^4\theta) \frac{p_z^4}{p^4} \right] + \ldots \right\}$$

$$(II,4,6)$$

Les deux premiers termes correspondent à $p_z = 0$ ; ils sont identiques à l'expression (II,2,8). Le dernier terme est proportionnel à $p_z^4$ : on retrouve le fait que le deuxième terme non nul du développement de $m_c^*(x)$ et $\omega_c(x)$ soit d'ordre 4 en p, c'est-à-dire d'ordre 2 en x. Le signe de ce coefficient donne le sens du déplacement de la raie principale. En particulier, pour $\theta = 29,5^\circ$, ce terme est nul et la raie doit être sensiblement symétrique.

3) On peut calculer la forme des raies ; l'approximation faite élimine les contributions dues aux valeurs faibles de x ($p_z$ grand), de sorte que la forme est celle de la raie principale ($x = \infty$). On constate qu'il y a effectivement une dissymétrie dont le sens est donné par le signe du coefficient d'ordre 4 du développement, et de plus un déplacement dans le même sens du sommet de la raie par rapport à la position calculée pour $p_z = 0$. Dans le cas où $\nu = \omega\tau$ est grand, le déplacement relatif est de $0,22/\omega\tau$ vers les grands champs pour $\vec{B}$ dans la direction $[100]$, et vers les faibles champs pour $[111]$ et $[110]$.

4) Les surfaces d'énergie constante n'étant pas ellipsoïdales, les hodographes dans l'espace des moments (tubes de Shockley) ne sont pas des ellipses. Le mouvement sur ces hodographes est périodique (de période $2\pi/\omega_c$), mais il n'est pas uniforme ; on peut écrire la variation de l'angle polaire $\varphi$ sous forme de série de Fourier :

$$\varphi = \omega_c t + (a_0 + a_1 e^{i\omega_c t} + a_{-1} e^{-i\omega_c t} + \ldots) \quad . \qquad (II,4,7)$$

On voit que, s'il y a absorption pour $\omega = \omega_c$, il y a également absorption pour $\omega = 2\omega_c$, $3\omega_c$, ... , c'est-à-dire pour les fréquences harmoniques.

Un cas intéressant est celui où B est dirigé suivant un axe de symétrie d'ordre q de l'hodographe. On peut alors affirmer que le développement de Fourier (II,4,7) ne contient que des termes de la forme $e^{inq\omega_c t}$ où n est entier : il n'y a absorption que pour les harmoniques $1+nq$ (n entier). En particulier, on a pour les trois axes principaux :

| Axe | q | Harmoniques permis | Harmoniques interdits |
|---|---|---|---|
| [100] | 4 | 1 , 3 , 5 , 7 , ... impairs | 2 , 4 , 6 , ... pairs |
| [110] | 2 | 1 , 3 , 5 , 7 , ... impairs | 2 , 4 , 6 , ... pairs |
| [111] | 3 | 1 , 2 , 4 , 5 , 7 , ... | 3 , 6 , 9 multiples de 3 |

Remarquons que pour $p_z = 0$ , la symétrie peut être plus grande ; pour [111], la symétrie est d'ordre 6 plutôt que 3, et les seuls harmoniques permis sont 1, 5, 7, ... Mais, en fait, un léger défaut d'orientation peut beaucoup modifier ces règles.

Zeiger, Lax et Dexter ont calculé l'intensité des premiers harmoniques et retrouvent les règles de sélection pour les axes importants.

## II - 5. Calcul de $m_c^{\ast\ast}$ dans le cas général $p_z \neq 0$

Nous avons déjà indiqué la méthode générale pour calculer $m_c^{\ast\ast}(x)$ et $dN/dm_c^{\ast\ast}$ en connaissant la forme des surfaces d'énergie constante. Rappelons que

$$m_c^{\ast\ast}(x) = \frac{\hbar^2}{\pi} \frac{d\Sigma}{dx}$$

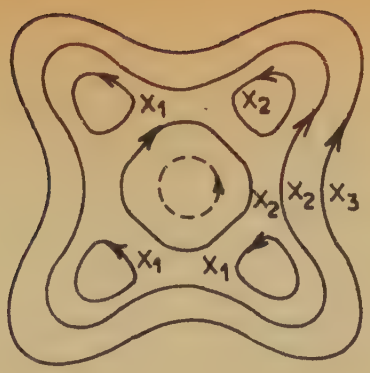
où $\Sigma$ est la surface de la section par un plan $x = C^{te}$ des surfaces réduites d'équation

$$x = A(1 + y^2) \pm \left[ g_0 y^4 + g_1 y^3 + g_2 y^2 + g_3 y + g_4 \right]^{1/2}$$

($x, y, 1/x^2$ sont des coordonnées cylindriques). Ces surfaces sont des "sphères gondolées" (Fig.3). Les sections par des plans $x = C^{te}$ peuvent être constituées de plusieurs courbes fermées sans points d'intersection [11][20] (Fig.6), et on peut se demander si on peut appliquer encore la méthode précédente à la détermination de $m_c^{\ast\ast}$ . Cependant, on peut montrer [21] qu'elle s'applique à chacun des contours fermés. Pour certaines valeurs de x, il y a donc plusieurs masses effectives possibles (la fonction $m_c^{\ast\ast}(x)$ peut être multiforme). Pour les directions des axes de symétrie, ces déterminations multiples peuvent avoir la même valeur, de sorte que les branches correspondantes de la fonction $m_c^{\ast\ast}(x)$ sont doubles ou quadruples (cf. Fig.6 dans le cas [100] : il peut y avoir quatre contours de même surface).

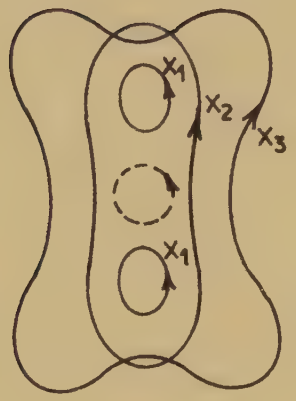
Une autre particularité de ces sections se présente dans les directions voisines de [100] ; en effet, dans ces directions, les surfaces d'énergie constante sont réentrantes (pour la bande $V_1$ des trous lourds), et il existe des sections composées de deux courbes fermées l'une intérieure à l'autre, les sens de circulation sur les deux trajectoires étant opposés : il peut donc y avoir une branche de la fonction $m_c^{\ast\ast}$ correspondant à des valeurs négatives. L'existence de ces masses négatives a été remarquée pour la première fois par

[100]




$x_1 < x_2 < x_3$

[110]




$x_1 < x_2 < x_3$

[111]

$x_1 < x_2 < x_3$

FIG. 6

SECTION DES SURFACES REDUITES $x = f(y, \varphi)$ DE LA BANDE DE VALENCE DU GERMANIUM PAR DES PLANS $Z = C^{te}$

En trait plein : sections de la bande $V_1$ ( trous lourds )

En trait pointillé : section de la bande $V_2$ (trous légers)

Krömer [22], et elles ont donné lieu à de nombreuses études [11][23]; cependant, il ne semble pas que la densité $dN/dm_c^*$ puisse devenir infinie pour une valeur négative de $m_c^*$, ce qui rend difficilement observables des raies correspondant à ces masses.

Le calcul de $m_c^*(x)$ peut être fait numériquement une fois les coefficients A, B, C connus. Dans certaines directions, comme [100] et [110], il se simplifie, car l'équation donnant y est bicarrée ($g_1 = g_3 = 0$). Le calcul de $\sum$ fait alors intervenir des intégrales elliptiques[11] que l'on peut ramener à des fonctions tabulées. Nous verrons plus loin (Chapitre V) les résultats de ce calcul dans les trois directions principales.

## Chapitre III

## THEORIE QUANTIQUE DE LA RESONANCE CYCLOTRON

### III - 1. Cas des bandes sphériques ou ellipsoïdales

Il s'agit de trouver à partir de l'équation de Schrödinger l'énergie d'une particule placée dans une induction magnétique $\vec{B}$.

a) Particule libre

Soit une particule libre de masse m et de charge e placée dans une induction $\vec{B}$ dirigée suivant Oz. En l'absence de $\vec{B}$, l'énergie de la particule est

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \qquad (III,1,1)$$

En l'absence de $\vec{B}$, le hamiltonien qui décrit le mouvement de la particule s'obtient en remplaçant $\vec{p}$ par $\vec{p}-e\vec{A}$ (cf. Chapitre I) ($\vec{A}$ est le potentiel vecteur dont dérive $\vec{B}$) dans l'expression de l'énergie ; l'équation de Schrödinger correspondante s'obtient en remplaçant $\vec{p}$ par l'opérateur $\hbar\vec{\nabla}/i$ ;

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar\vec{\nabla}}{i} - e\vec{A}\right)^2 \Psi(xyz) = E\,\Psi(xyz) \quad . \qquad (III,1,2)$$

Si on prend le potentiel vecteur $\vec{A}$ avec la gauge particulière $A_x = -B_y$, $A_y = 0 = A_z$, on obtient :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + i\hbar\omega_c\, y\frac{d}{dx} + \frac{m}{2}\,\omega_c^2\, y^2\right]\Psi = E\,\Psi \quad , \quad (III,1,3)$$

où $\omega_c = eB/m$ . Posons :

$$\Psi = \varphi(x)\exp +i(k_y y + k_z z) \quad ;$$

on trouve alors :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m}(\hbar k_y - \omega_c m x)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\,k_z^2\right]\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

$$(III,1,5)$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique à une dimension, de pulsation $\omega_c$, et dont l'origine est déplacée de $\hbar k_y/\omega_c m$. Les fonctions propres $\Psi_n$ sont les fonctions propres bien connues d'oscillateur harmonique.

Il en résulte que les fonctions propres d'une particule libre placée dans une induction $B$ sont :

$$\Psi_n = \left(\frac{1}{L_y L_z}\right)^{1/2} \exp i(k_y y + k_z z)\, \Psi_n \left(x - \frac{\hbar k_y}{eH}\right) \qquad (III,1,6)$$

(elles sont normalisées dans un parallélipipède de côtés $L_x$ $L_y$ $L_z$), et les valeurs propres de l'énergie sont :

$$E = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \qquad (III,1,7)$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$). On voit donc que la bande d'énergie $E \geqslant 0$ de la particule libre est quantifiée dans la direction perpendiculaire à $\vec{B}$, et se partage en sous-bandes parallèles (sous-bandes de Landau, ou niveaux de Landau) équidistantes de $\hbar\omega_c$.

Si on suppose maintenant que la particule est soumise en plus à un champ électrique alternatif $\vec{\mathcal{E}}$ de pulsation $\omega$, on peut calculer les probabilités de transition entre les différentes sous-bandes à l'aide de la théorie semi-classique du rayonnement ; elles sont proportionnelles au carré de l'élément de matrice

$$M_{\alpha\beta} = \frac{e\,\mathcal{E}_o}{m\,\omega} \left\langle \Psi_\alpha \left| \vec{p} - e\vec{A} \right| \Psi_\beta \right\rangle \quad . \qquad (III,1,8)$$

Il est facile de montrer que $M_{\alpha\beta}$ n'est différent de zéro que si $\vec{\mathcal{E}}$ a une composante perpendiculaire à $\vec{B}$, et si $\alpha - \beta = 1$ ; les seules transitions permises sont donc les transitions $\Delta n = 1$, pour lesquelles $\omega = \omega_c$. De plus

$$M_{n,\,n+1} = \left[\frac{2e\hbar}{B}(n+1)\right]^{1/2} , \qquad (III,1,9)$$

de sorte que la probabilité de transition d'une particule à un niveau n vers un niveau n+1 est plus grande que sa probabilité de transition vers un niveau n-1. Globalement, on a donc une <u>absorption</u> à la fréquence $\omega_c$.

b) <u>Particule de masse effective isotrope dans un semi-conducteur</u>

Soit $m^*$ la masse effective de la particule ; son énergie peut s'écrire

$$E = E_o + \frac{\vec{p}^2}{2m^*} \quad . \qquad (III,1,10)$$

Luttinger et Kohn [24] ont montré que le formalisme de la masse effective pouvait encore être utilisé et que les fonctions propres d'ordre zéro peuvent se mettre sous la forme

$$f_n(x,y,z) = u_o(x,y,z)\,\Psi_n(x,y,z) \qquad (III,1,11)$$

où $u_o(x,y,z)$ est la fonction d'onde du bord de la bande, et les $\Psi_n$ sont les fonctions propres calculées ci-dessus (et correspondant naturellement à une masse $m^*$). L'énergie de la particule est donnée par :

$$E = E_o + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2\,m^*} + (n+\frac{1}{2})\,\hbar\omega_c \qquad (III,1,12)$$

où $\omega_c = eB/m^*$ .

Si on applique un champ électrique alternatif $\vec{\mathcal{E}}$, on peut encore calculer la probabilité de transition par une formule analogue à (III,1,8). Mais on peut considérer que $\Psi_\alpha$ et $\Psi_\beta$ restent constants dans l'étendue d'une maille, de sorte que l'intégration sur $u_o$ s'élimine. Les règles de sélection restent donc les mêmes, avec $\vec{\mathcal{E}}$ perpendiculaire à $\vec{B}$ et $\Delta n = 1$ $(\omega = \omega_c)$ .

c) Particule avec des surfaces d'énergie constante ellipsoïdales

Le hamiltonien est alors :

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{(p_i - e\,A)^2}{2\,m_i} \qquad (i = 1, 2, 3)\ ; \qquad (III,1,13)$$

les axes de coordonnées sont ici les axes principaux de l'allipsoïde de masse effective. Faisons la transformation

$$p_i = \sqrt{\frac{m_i}{m_o}}\ p'_i \quad , \qquad A_i = \sqrt{\frac{m_i}{m_o}}\ A'_i \quad ; \qquad (III,1,14)$$

elle correspond à un changement d'échelle sur les axes

$$x_i = \sqrt{\frac{m_o}{m_i}}\ x'_i \quad . \qquad (III,1,14')$$

Le hamiltonien s'écrit alors

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\,m_o} \sum_i (p'_i - e\,A_i)^2 \quad . \qquad (III,1,15)$$

On est donc ramené au cas sphérique.

On peut alors facilement montrer [6] que

$$\omega_c = \frac{e B}{m_c^{\star}} = e B \sqrt{\frac{\alpha_1^2 m_1 + \alpha_2^2 m_2 + \alpha_3^2 m_3}{m_1 m_2 m_3}} \qquad (III,1,16)$$

($\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\alpha_3$ :cosinus directeurs de $\vec{B}$ par rapport aux axes principaux) ; cette formule est identique à la formule (I,4,5) obtenue classiquement.

Ici encore, la règle de sélection $\Delta n = 1$ en présence d'un champ électrique alternatif est valable. Cependant, il peut y avoir absorption avec $\vec{\mathcal{E}}$ parallèle à $\vec{B}$ ; en effet, en faisant le changement de variable, on fait apparaître dans le système où le hamiltonien est d'allure isotrope, une composante de $\vec{\mathcal{E}}$ normale à $\vec{B}$, de sorte que l'absorption est possible. Ceci a déjà été signalé du point de vue classique au § I.4 .

## III - . Théorie quantique de la résonance cyclotron dans la bande de valence du germanium

Le problème général consiste à déterminer les sous-bandes de Landau de la bande de valence complexe du germanium, les probabilités de transition entre ces sous-bandes en présence d'un champ électrique alternatif et l'absorption qui en résulte en fonction du champ magnétique (compte tenu des phénomènes de relaxation).

Ce problème est extrêmement complexe ; il a été abordé pour la première fois par Luttinger et Kohn [24], puis par Luttinger [25]. Nous n'entrerons pas dans le détail des raisonnements et de calculs faits, et nous indiquerons simplement les résultats essentiels et les hypothèses faites.

Luttinger considère d'abord la bande de valence du germanium dans le cas où le couplage spin-orbite est nul ; la bande de valence est alors triplement dégénéré en $\vec{p} = 0$ (six fois dégénéré si on tient compte du spin électronique), les fonctions d'onde étant de type P dans l'hypothèse du couplage faible (autrement dit, ces fonctions proviennent d'orbitales P quand on imagine un cristal fictif dont les atomes sont très écartés, et que l'on comprime pour amener les atomes à leurs emplacements réels dans le cristal). Le hamiltonien qui décrit le mouvement des porteurs dans une telle bande en présence d'une induction magnétique $\vec{B}$ comporte deux termes : l'un d'eux est un terme "symétrique" et s'exprime avec trois coefficients "symétriques" qui sont liés aux coefficients

A, B, C introduits par Dresselhaus, Kip et Kittel [4] ; l'autre terme est "anti-symétrique" (avec un coefficient "anti-symétrique") et provient de la non-commutativité des différentes composantes du vecteur d'onde en présence d'une induction magnétique [*]. Le coefficient "anti-symétrique" ne s'introduit pas dans l'analyse classique où la forme des surfaces d'énergie constante de la bande de valence est établie sans tenir compte de l'induction $\vec{B}$.

Dans le cas où il y a couplage spin-orbite, on sait que celui-ci lève partiellement la dégénérescence en abaissant les deux états $j = \pm\frac{1}{2}$ (bande $V_3$) en dessous des quatre états $j = \frac{3}{2}$ (bande $V_1V_2$). La séparation $\Delta$ est assez importante ( $\Delta \simeq 0{,}28$ eV dans le germanium, la bande interdite étant de 0,7 eV environ) ; on peut donc supposer que $(V_1V_2)$ et $(V_3)$ sont découplées et traiter séparément l'influence du couplage spin-orbite sur chaque bande. Le hamiltonien qui décrit le mouvement des porteurs dans la bande $(V_1V_2)$ (la seule qui nous intéresse du point de vue résonance cyclotron, l'énergie cyclotron étant très faible devant $\Delta$ ), a une forme presque identique à celle qu'il a en l'absence de couplage spin-orbite: la seule différence est que les coefficients "symétriques" et "anti-symétriques" ne sont plus les mêmes, et qu'il y a un nouveau terme faisant intervenir un nouveau coefficient. Quand on fait tendre le couplage spin-orbite vers zéro, ce coefficient tend vers zéro, et les autres tendent vers les coefficients "symétriques" et "anti-symétriques" sans couplage spin-orbite. Etant donné la symétrie cubique du germanium, on peut alors établir la forme la plus générale de ce hamiltonien :

$$D = \frac{1}{m_o}\left\{ \left(\gamma_1 + \frac{5\,\gamma_2}{2}\right)\frac{p^2}{2} - \gamma_2\left(p_x^2 J_x^2 + p_y^2 J_y^2 + p_z^2 J_z^2\right) - \right.$$

$$- 2\,\gamma_3\left(\left\{p_x,p_y\right\}\left\{J_x,J_y\right\} + \left\{p_y,p_z\right\}\left\{J_y,J_z\right\} + \left\{p_z,p_x\right\}\left\{J_z,J_x\right\}\right)$$

$$\left. + c\left(\vec{J}.\vec{B} + e\,q\left(J_x^2 B_x + J_y^2 B_y + J_z^2 B_z\right)\right)\right\} \quad ; \qquad (III,2,1)$$

$\vec{J}$ est l'opérateur moment angulaire de l'état $j = 3/2$ , dont les composantes $J_x, J_y, J_z$ sont des matrices $4 \times 4$ qui satisfont aux règles de commutation des composantes de moment angulaire ; $\left\{k_x k_y\right\}$ et les expressions analogues désignent des produits symétrisés analogues à $\frac{1}{2}(p_x p_y + p_y p_x)$. Les constantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

---

[*] On a $(p_x,p_y) = \frac{1}{i}\,eB_z$ ; c'est la relation qui nous a permis de montrer au § I.5 que $p_x/\sqrt{eB}$ et $p_y/\sqrt{eB}$ sont des variables conjuguées.

sont les coefficients "symétriques" ; ils sont liés aux coefficients A,B,C de la bande de valence (voir Tableau I) ; ces derniers ne sont pas exactement ceux introduits par Dresselhaus, Kip et Kittel [4] dans le calcul classique, mais ces coefficients modifiés par l'effet du couplage spin-orbite [25] ; ceci n'a d'ailleurs guère d'importance, ces coefficients étant de toute façon déterminés expérimentalement à partir de la résonance cyclotron. $K$ est le coefficient "anti-symétrique" lié à la non-commutativité des composantes de $\vec{p}$. Ce coefficient ne peut pas être déterminé à partir des données expérimentales classiques (qui ne font intervenir que les coefficients A,B,C) ; cependant, il peut être relié aux quatre coefficients F,G,$H_1$ et $H_2$ introduits par Dresselhaus, Kip et Kittel [26] (Tableau I) ; nous avons vu qu'il est vraisemblable que le coefficient $H_2$ soit négligeable (§ II.1), de sorte que l'on peut exprimer $K$ à partir de F,G, $H_1$, et finalement évaluer à partir des coefficients expérimentaux A,B,C. Le coefficient q exprime l'effet direct du couplage spin-orbite ; il est assez difficile à évaluer ; a priori, il semble difficile de le négliger, le couplage spin-orbite étant assez important dans le germanium (cette approximation serait plus justifiée dans le silicium) ; cependant, une estimation de Kohn (voir note 9, référence 27), donne $q \simeq 0{,}01$ dans le germanium, et nous engage à négliger le terme correspondant. Nous verrons plus loin une autre justification de cette approximation (§ III.4).

Il faut résoudre D ; cette résolution n'est simple que si $p_B = 0$ ($p_B$ est un invariant comme en théorie classique ; ceci résulte immédiatement des relations $(p_x, p_y) = eB_z/i$ et analogues) ; elle est alors facile dans les cas suivants :

a) Si $\vec{B}$ est dirigé suivant un axe [111] : le problème se ramène à la recherche numérique des valeurs propres d'une matrice $4 \times 4$ dont les fonctions propres sont des combinaisons de fonctions propres d'oscillateur harmonique.

b) Si les bandes sont isotropes (ce qui correspond à $C = 0$ ou $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$) ; c'est une première approximation raisonnable dans le germanium où on a $(\gamma_2 - \gamma_3)/(\gamma_2 + \gamma_3) \simeq 0{,}11$ ; cf. Chapitre V). Le hamiltonien D se simplifie alors et devient :

$$D = \frac{1}{m_o}\left\{(\gamma_1 + \frac{5}{2}\bar{\gamma})\,p^2 - \bar{\gamma}.(\vec{p}.\vec{J})^2 + (K - \frac{\bar{\gamma}}{2})\,e\,\vec{J}.\vec{B}\right\} \quad . \qquad (III,2,2)$$

Si on choisit la représentation suivante de J :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{3}\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & i & -\sqrt{3}\frac{i}{2} \\ \sqrt{3}\frac{i}{2} & -i & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}\frac{i}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(III,2,3)

il est facile de voir que D peut se mettre sous la forme :

$$D = \frac{eB}{m_o} \begin{pmatrix} (\gamma_1+\bar{\gamma})(a^+a+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}\mathcal{K} & -\sqrt{3}\,\bar{\gamma}\,a^2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}\,\bar{\gamma}\,a^{+2} & (\gamma_1-\bar{\gamma})(a^+a+\frac{1}{2})+\frac{\mathcal{K}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_1-\bar{\gamma})(a^+a+\frac{1}{2})+\frac{\mathcal{K}}{2} & -\sqrt{3}\,a^2\,\bar{\gamma} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\,\bar{\gamma}\,a^{+2} & (\gamma_1+\bar{\gamma})(a^+a+\frac{1}{2})-\frac{3}{2}\mathcal{K} \end{pmatrix}$$

(III,2,4)

où

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\,eB}}(p_x + ip_y)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\,eB}}(p - ip_y) \qquad \text{(III,2,5)}$$

sont les opérateurs création et annihilation des fonctions propres d'oscillateur harmonique ($a^+\varphi_n = \sqrt{n+1}\,\varphi_{n+1}$ , $a\,\varphi_n = \sqrt{n}\,\varphi_{n-1}$ , $a^+a\,\varphi_n = n\,\varphi_n$). On voit que cette matrice se partage en deux sous-matrices d'ordre 2, et que les fonctions propres de ces deux sous-matrices sont de la forme

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} a_1\varphi_{n-2} \\ b_1\varphi_n \end{pmatrix} \qquad \Psi_2 = \begin{pmatrix} a_2\varphi_{n-2} \\ b_2\varphi_n \end{pmatrix} \qquad \text{(III,2,6)}$$

où $a_1$ , $a_2$ , $b_1$ , $b_2$ sont des coefficients numériques. Les équations séculaires correspondantes sont du second degré et se résolvent immédiatement :

$$E_1^{\pm}(n) = \frac{eB}{m_o}\left\{ \gamma_1 n - \left[ \left(\frac{\gamma_1}{2} + \bar{\gamma} - \frac{\mathcal{K}}{2}\right) \pm \left[ \left(\bar{\gamma}n - \gamma_1 + \mathcal{K} - \frac{\bar{\gamma}}{2}\right)^2 + 3\,\bar{\gamma}^2 n(n-1) \right]^{1/2} \right\} \right.$$

$$E_2^{\pm}(n) = \frac{eB}{m_o}\left\{ \gamma_1 n - \left(\frac{\gamma_1}{2} - \bar{\gamma} + \frac{\mathcal{K}}{2}\right) \pm \left[ \left(\bar{\gamma}n - \gamma_1 - \mathcal{K} - \frac{\bar{\gamma}}{2}\right)^2 + 3\,\bar{\gamma}^2 n(n-1) \right]^{1/2} \right\} \qquad \text{(III,2,7)}$$

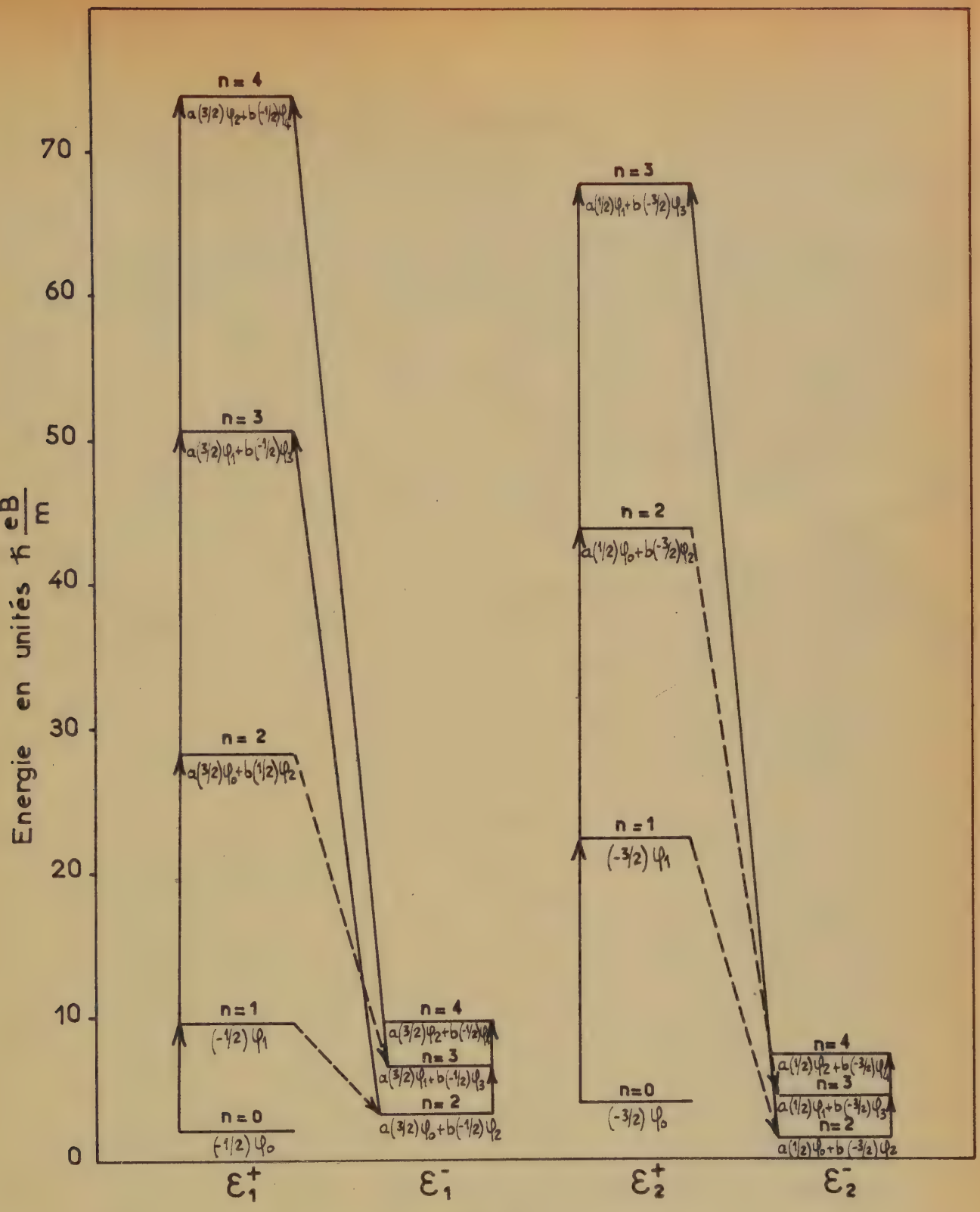



FIG. 7

NIVEAUX D'ENERGIE CYCLOTRON DE LA BANDE DE VALENCE DE GERMANIUM A $P_B = 0$

On a indiqué la forme des fonctions propres correspondantes et quelques transitions possibles (en pointillé, des transitions à " masse négative " )

où les solutions physiques correspondent à

$$\begin{cases} n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots & \text{pour } E^+ \\ n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots & \text{pour } E^- \end{cases}$$

($a_1$ et $a_2$ sont nuls pour n=0 ou 1). Remarquons que l'examen de $J_z$ nous permet d'écrire les fonctions propres sous une forme analogue à (III,1,11) :

$$\begin{cases} \Psi_1(n) = a_1\, u_{3/2}\, \Psi_{n-2} + b_1\, u_{-1/2}\, \Psi_n \ ; \\ \Psi_2(n) = a_2\, u_{1/2}\, \Psi_{n-2} + b_2\, u_{-3/2}\, \Psi_n \ . \end{cases} \qquad \text{(III,2,8)}$$

$a_{1\pm}(n)$ , $b_{1\pm}(n)$ , $a_{2\pm}(n)$ , $b_{2\pm}(n)$ peuvent être calculés si on impose la condition de normalisation $a^2+b^2=1$ ; les expressions correspondantes se trouvent dans la référence 28.

On a donc quatre série de niveaux, ce qui correspond à la quadruple dégénérescence de la bande $(V_1 V_2)$ en $\vec{p}=0$ , ou l'absence de $\vec{B}$. Ces niveaux ne sont pas en général équidistants (Fig.7) ; en première approximation, les niveaux $E^-$ correspondent aux trous lourds (bande $V_1$), les niveaux $E^+$ aux trous légers (bande $V_2$) ; en effet, les premiers sont relativement moins espacés que les seconds, et correspondent donc à des masses cyclotron plus grandes.

On peut chercher les probabilités de transition en présence d'un champ électrique alternatif $\vec{\mathcal{E}}$. Etant donné la forme des fonctions d'onde (III.2.8), un raisonnement analogue à celui fait dans le § III.1.b montre que les probabilités de transition ne sont différentes de zéro que si $\vec{\mathcal{E}}$ possède une composante normale à $\vec{B}$, et que si la transition a lieu entre deux niveaux d'indices différents d'une unité ($\Delta n=1$) d'une même série ; les transitions permises sont donc $E_1^+(n) \leftrightarrow E_1^+(n+1)$ et $E_2^+(n) \leftrightarrow E_2^+(n+1)$ . Remarquons qu'à l'intérieur de chaque série (1) ou (2), il peut y avoir des transitions entre niveaux de trous lourds et de trous légers (Fig.7) ; certaine de ces transitions croisées sont dirigées de haut en bas (pour aller de $\Psi_n$ à $\Psi_{n+1}$) ; d'après la formule (III,1,9), elles conduisent donc à une émission d'énergie, plutôt qu'à une absorption, et correspondant donc à des masses cyclotron "négatives" ; naturellement une émission globale ne peut être observée que si la population du niveau de départ est plus grande que celle du niveau d'arrivée, autrement dit, s'il y a une inversion de température entre ces deux niveaux.

c) L'approximation de la symétrie sphérique est un peu brutale : la hamiltonien D étant invariant par rotation, il conduit à des niveaux indépendants de la direction de $\vec{B}$.

On peut essayer de corriger ce résultat en faisant un calcul de perturbation par rapport à $\gamma_2-\gamma_3$ . Comme dans le calcul classique, Luttinger se limite à $\vec{B}$ dans un plan (110) . Dans le cas où $p_B = 0$ , le hamiltonien général peut se mettre sous la forme

$$D = D_o + D_1 + D_2 \qquad \text{(III,2,9)}$$

où

$$D_o = \frac{eB}{m_o}\begin{pmatrix} (\gamma_1+\gamma')(a^+a+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}\mathcal{K} & -\sqrt{3}\,\gamma' a^2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}\,\gamma'' a^{+2} & (\gamma-\gamma')(a^+a+\frac{1}{2})-\frac{\mathcal{K}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma-\gamma')(a^+a+\frac{1}{2})+\frac{\mathcal{K}}{2} & -\sqrt{3}\,a^2\gamma'' \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\,\gamma'' a^{+2} & (\gamma_1+\gamma')(a^+a+\frac{1}{2})-\frac{3}{2}\mathcal{K} \end{pmatrix} \qquad \text{(III,2,10)}$$

et

$$\begin{cases} \gamma' = \gamma_3 + (\gamma_2 - \gamma_3)\Theta \\ \gamma'' = (2\gamma_3 + \gamma_2)/3 + (\gamma_2 - \gamma_3)\Theta/6 \end{cases} \qquad \text{(III,2,11)}$$

( $\Theta$ est défini par la formule (II,2,9)).

$D_1$ est une matrice $4\times4$ qui est diagonale dans la représentation $D_o$ , de sorte qu'il n'introduit qu'une perturbation du second ordre en $\gamma_2-\gamma_3$ . $D_2$ est proportionnel à q, qui est négligé ; il n'a été introduit que pour plus de généralité.

$D_o$ est très semblable à D et peut être résolu de la même façon ; on trouve

$$E_1^{\pm}(n) = \frac{eB}{m_o}\left\{\gamma_1 n - \left(\frac{\gamma_1}{2}+\gamma'-\frac{\mathcal{K}}{2}\right) \pm \left[\left(\gamma' n - \frac{\gamma'}{2} - \gamma_1 + \mathcal{K}\right)^2 + 3\gamma'' n(n-1)\right]^{1/2}\right\},$$

$$E_2^{\pm}(n) = \frac{eB}{m_o}\left\{\gamma_1 n - \left(\frac{\gamma_1}{2}-\gamma'-\frac{\mathcal{K}}{2}\right) \pm \left[\left(\gamma' n - \gamma_1 - \mathcal{K} - \frac{\gamma'}{2}\right)^2 + 3\gamma'' n(n-1)\right]^{1/2}\right\}, \qquad \text{(III,2,12)}$$

les solutions physiques correspondant encore à n = 0, 1, 2, ... pour $E^+$ et n = 2, 3, 4, ... pour $E^-$.

De cette manière, sans faire explicitement le calcul de perturbation, on tient compte de l'anisotropie jusqu'au premier ordre en $\gamma_2-\gamma_3$ . La validité de

ce calcul peut être vérifiée ; en effet, quand les nombres quantiques n deviennent grands, on doit retrouver l'effet classique ; effectivement, on voit sur les formules (III,2,12) que les niveaux deviennent équidistants et espacés de

$$\hbar\omega_c^{\pm} = \frac{eB}{m_o}\left\{ \gamma_1 \pm (\gamma'^2 + 3\,\gamma''^2)^{1/2} \right.$$

$$= \frac{eB}{m_o}\left\{ \gamma_1 \pm \left[\gamma_3^2 + \frac{(2\gamma_3+\gamma_2)^2}{3}\right]^{1/2} \pm \frac{(\gamma_2-\gamma_3)(8\,\gamma_3+3\,\gamma_2)}{6\left[\gamma_3^2 + \frac{(2\gamma_3+\gamma_2)^2}{3}\right]^{1/2}} (H) + \ldots \right\} . \qquad \text{(III,2,13)}$$

On peut confronter cette formule avec celle donnée par le calcul classique dans les mêmes hypothèses ($p_B=0$), exprimée à l'aide de $\gamma_1$ , $\gamma_2$ , $\gamma_3$ :

$$\hbar \frac{eB}{m_c^*} = \frac{eB}{m_o}\left\{ \gamma_1 \pm (\gamma_2^2 + 3\,\gamma_3^2)^{1/2} \pm \frac{3}{4}\,\frac{\gamma_2^2 - \gamma_3^2}{(\gamma_2^2 + 3\,\gamma_3^2)^{1/2}} (H) + \ldots \right. . \qquad \text{(III,2,14)}$$

On voit que cette formule ne coïncide pas avec la précédente, même en ce qui concerne les termes indépendants de (H), ce qui montre qu'une partie de l'anisotropie a disparu ; elle reste contenue dans $D_1$ et pour pouvoir confronter les résultats avec l'expérience, il faut faire un calcul de perturbation au second ordre. Les fonctions propres ne peuvent alors pas être mises sous la forme simple (III,2,6) ; le hamiltonien $D_1$ introduit un mélange des deux séries (1) et (2), et de manière générale, on a:

$$= u_{3/2}\left(a_1(0)\varphi_0 + a_1(1)\varphi_1 + \ldots\right) + u_{-1/2}\left(b_1(0)\varphi_0 + b_1(1)\varphi_1 + \ldots\right)$$
$$+ u_{1/2}\left(a_2(0)\varphi_0 + a_2(1)\varphi_1 + \ldots\right) + u_{-3/2}\left(b_2(0)\varphi_0 + b_2(1)\varphi_1 + \ldots\right)$$
$$\text{(III,2,15)}$$

Il en résulte que les règles de sélection que nous avons établies ne sont pas strictes et peuvent être violées au second ordre en $(\gamma_2-\gamma_3)$. On ne peut pas donner dans ce cas d'expressions algébriques pour les niveaux d'énergie, et les calculs ne peuvent être que numériques ; on en trouvera un exemple dans la référence 27.

III - 3. Etude de l'hypothèse $p_B = 0$

On peut utiliser des considérations sur la densité d'état, analogues à celles faites dans le cas classiques. Par analogie avec la formule (III,1,12), on peut faire un développement limité de l'énergie au voisinage de $p_B = 0$, en fonction du maramètre sans dimensions $d = p_B/\sqrt{\hbar eB}$ ; comme D est invariant quand on change $p_B$ en $-p_B$, ce développement est pair en d :

$$E(n) = E_o(n) + \frac{e\,B}{2\,\mu_o(n)}\,d^2 + \ldots \qquad , \qquad (III,3,1)$$

$E_o(n)$ est la valeur déterminée plus haut du niveau d'énergie à $k_z = d = 0$ ; par analogie avec la formule (III,1,12), $\mu_o(n)$ peut être appelé la masse effective de courbure des niveaux de Landau.

Soit une transition permise au voisinage de $d = 0$ : $E(n) \longrightarrow E(n')$ ; on a :

$$\hbar\omega_c = \Delta E = \Delta E_o + \frac{e\,B}{2}\,\Delta\left(\frac{1}{\mu_o}\right) d^2 + \ldots \qquad (III,3,2)$$

De manière analogue à ce qui a été fait dans le § I.5, on peut considérer une densité de répartition de fréquences cyclotron $dN/d\omega_c$ ; au facteur géométrique $dN/dp_B$ près, elle est proportionnelle à $dp_B/d\omega_c$, c'est-à-dire à $1/(d\omega_c/dd)$ ; au voisinage de $d=0$, elle sera donc proportionnelle à $1/\Delta(1/\mu_o)d$ et sera divergente comme $1/d$, à moins que les masses effectives de courbure ne soient égales ; dans ce cas, il faut considérer les termes en $d^4$ du développement, et la divergence sera encore plus forte, en $1/d^3$ au moins (c'est le cas des bandes sphériques étudiées au § III.1). De toute façon, la densité divergente donnera des raies observables, ce qui justifie le calcul à $p_B = 0$, comme dans le cas classique, mais montre qu'il est intéressant de calculer les masses effectives de courbure.

On peut le faire par un calcul de perturbation au second ordre. C'est ce qu'ont fait Mallis et Dowdon [29] dans l'hypothèse où l'anisotropie est négligée ($\gamma_2 - \gamma_3 = C = 0$) ; les résultats sont résumés Fig.8 . Pour les niveaux de trous légers, la seule particularité est la masse de courbure assez elevée pour les premiers niveaux ; pour les niveaux de trous lourds, il y a une particularité plus importante : l'une des séries a une masse effective de courbure négative pour les premiers niveaux (l'énergie décroît quand $p_B$ croît) ; ceci tient à une dégénérescence accidentelle, les niveaux $E_1^-(n)$ et $E_2^-(n+1)$ étant très voisins ;

nous reviendrons plus loin (§ III.4) sur cette particularité.

Quand le nombre quantique n devient grand, la masse effective de courbure $\mu_o$ tend vers $m_o/(\gamma_1 \pm 2\bar{\gamma})$, c'est-à-dire la masse effective à $p_B = 0$ dans la limite des grands nombres quantiques ; nous retrouvons ici que, dans la limite classique, la densité diverge comme $1/p_B^3$ (cf. § II.3).

III - 4. Calcul général

Nous avons obtenu une densité divergente pour $p_B = 0$ grâce à un extremum de l'énergie d'une transition. Mais un extremum peut se produire en un autre point, et donner une raie observable, la densité y étant divergente. Une raie de ce type ne peut être prévue que si on connaît les sous-bandes de Landau et les règles de sélection correspondantes ; cependant, il existe un cas favorable à une telle situation, si les niveaux d'énergie eux-mêmes (et non leur différence) présentent des extrema pour des valeurs de $p_z$ voisines ; au voisinage d'un tel extremum, on peut encore définir une masse effective de courbure $\mu$ et écrire

$$E(n) = E'_o(n) + \frac{e\,B}{2\,\mu(n)} \left[ d - d_o(n) \right]^2 + \ldots \qquad \text{(III,4,1)}$$

On peut alors affirmer que la différence d'énergie entre deux tels niveaux $E(n)$ et $E(n')$ passe par un extremum où la densité diverge ; la raie correspondante est d'ailleurs d'autant plus marquée que les abscisses $d_o(n)$ et $d_o(n')$ des extrema et les masses effectives de courbures $\mu(n)$ et $\mu(n')$ sont plus voisines.

Une telle situation peut se présenter dans le germanium. Nous avons déjà signalé que, en se plaçant dans le cas isotrope, Wallis et Bowlden ont trouvé des masses effectives de courbure négatives à $p_B = 0$ pour les premiers niveaux de la série $E_1^-$ des trous lourds. Intrigués, ils ont poussé le calcul de $E^-(n)$ en fonction de d ; un simple calcul de perturbation est alors insuffisant et il faut faire une résolution sur machines à calculer. Le résultat est assez remarquable, et montre l'apparition d'extrema secondaires (Fig.8) : les niveaux ne sont pas simplement paraboliques, mais présentent des dépressions vers le haut ou le bas, de sorte que les niveaux $E_1^-$ présentent deux minima symétriques par rapport à $d = 0$. Pour des valeurs de n assez grands, on peut écrire [29] :

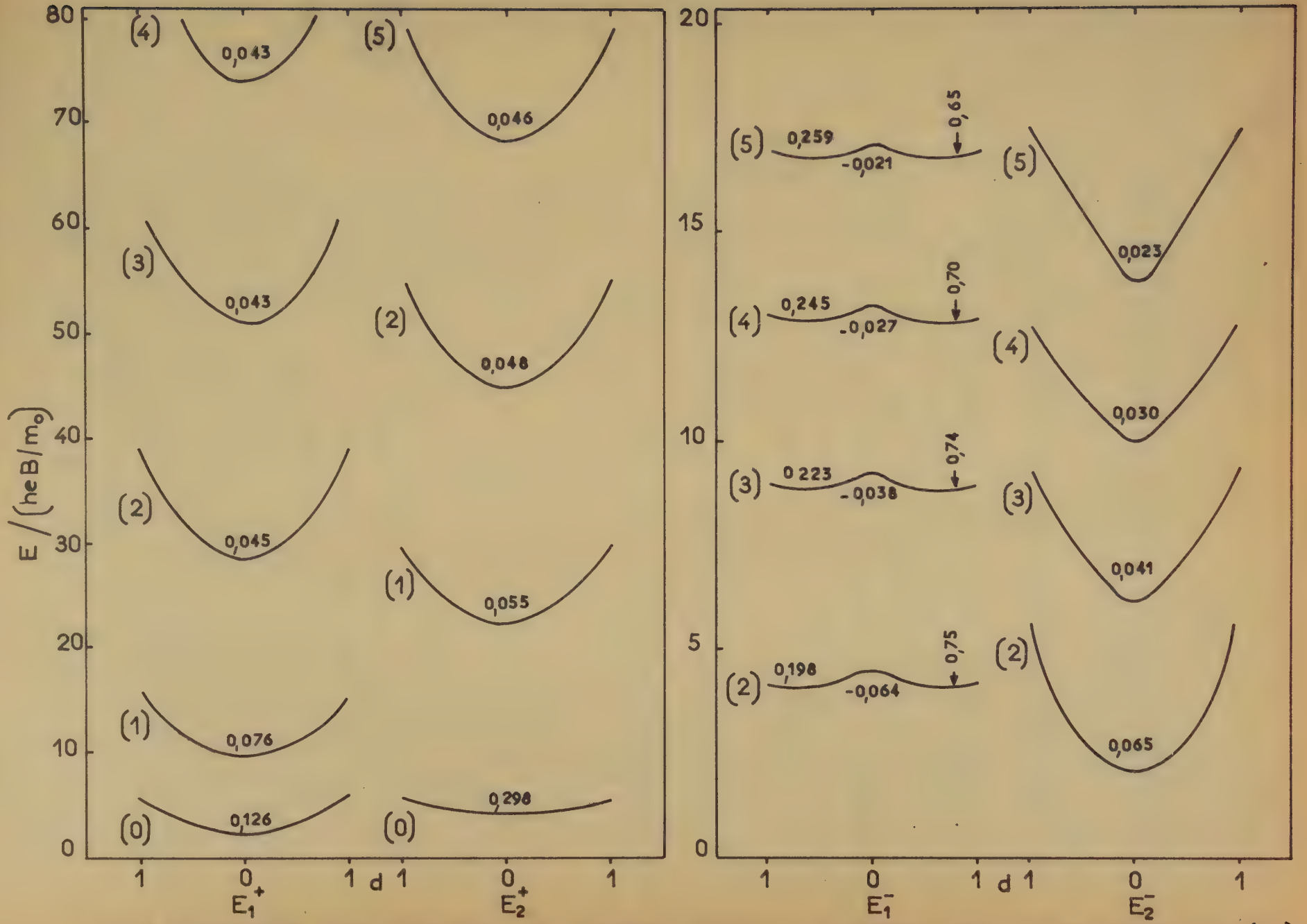



FIG. 8 VARIATION DES NIVEAUX DE LANDAU AVEC d , D'APRES WALLIS ET BOWLDEN (29)
(on a indiqué les masses effectives de courbure aux extrema et les abscisses des extrema secondaires des niveaux $E_1^-$)

$$E_1^-(n,d) \simeq \frac{eB}{m_o}\left\{(\gamma_1-2\bar{\gamma})n+\frac{1}{2}(\gamma_1-2\bar{\gamma})d^2-\frac{1}{2}\left[\frac{(2\bar{\gamma}+\gamma_1-\bar{k})^6}{(32\bar{\gamma}^2)^2\,n^4}+\frac{9(\gamma_1-\bar{k})^2}{2n}d^2\right]^{1/2}\right\}$$

$$E_2^-(n,d) \simeq \frac{eB}{m_o}\left\{(\gamma_1-2\bar{\gamma})n+\frac{1}{2}(\gamma_1-2\bar{\gamma})d^2+\frac{1}{2}\left[\frac{(2\bar{\gamma}+\gamma_1-\bar{k})^6}{(32\bar{\gamma}^2)^2\,n^4}+\frac{9(\gamma_1-\bar{k})}{2n}d^2\right]^{1/2}\right\}$$

(III,4,2)

On vérifie que, pour n assez grand, la masse effective de courbure tend vers $m_o/(\gamma_1-2\bar{\gamma})$ .

Le calcul général des niveaux d'énergie de la bande de valence du germanium a été fait par Evtuhov [30]. La méthode utilisée est analogue à celle de Dresselhaus, Kip et Kittel [4] et Kane [17]; mais alors que ces derniers font le calcul quantique en l'absence de l'induction, et n'introduisent $\vec{B}$ qu'ensuite, de manière classique, Evtuhov fait un calcul quantique en présence de $\vec{B}$ dès le départ. Disons tout de suite que si l'on fait des hypothèses identiques à celles de Luttinger, on retrouve les résultats de ce dernier. Nous ne reproduirons pas les calculs ici ; la résolution complète nécessite d'ailleurs des calculs sur machines. Nous indiquerons simplement quelques résultats intéressants.

Au départ, le calcul d'Evtuhov ne fait pas l'hypothèse du découplage des bandes $(V_1V_2)$ et $V_3$ ; l'influence de ce couplage est double : d'une part, la bande $(V_1V_2)$ est déformée par la proximité de $V_3$ , de sorte qu'il apparaît des effets non paraboliques (l'énergie n'est pas simplement une fonction homogène du second ordre de $\vec{p}$) ; du point de vue résonance cyclotron, ceci se traduit par une masse cyclotron dépendant de B ; l'écartement $\Delta$ entre les bandes $V_3$ et $(V_1V_2)$ étant grand devant l'énergie cyclotron ($\hbar\omega_c \simeq 10^{-4}$eV $\ll \Delta \simeq 0{,}29$ eV) , on peut prévoir que cet effet sera négligeable ; en effet, en faisant le calcul de E(n) en fonction de B pour $d = 0$ , Evtuhov trouve que la variation de $E(n)/(eB/m_o)$ est de l'ordre du pourcent quand B varie entre 0 et 10 $W/m^2$ , ce qui justifie l'hypothèse du découplage entre les deux bandes. D'autre part, l'hypothèse du découplage faite, le couplage spin-orbite peut encore s'introduire par le coefficient q de Luttinger (cf.III.2) ; pour évaluer l'influence du terme correspondant, il suffit de comparer les niveaux d'énergie à $d = 0$ dans le cas où on fait l'hypothèse du découplage avec $q = 0$ , avec les niveaux calculés dans le cas général à $d = 0$ ; cette comparaison donne des écarts très faibles, ce qui justifie l'hypothèse.

Les hypothèses du découplage et $q = 0$ étant faites, Evtuhov donne les méthodes numériques à utiliser pour B dirigé suivant les trois axes importants ( [100] , [111] , [110] ) et fait la résolution numérique pour la direction [100] . Le calcul est alors simplifié, si à ce niveau on fait l'hypothèse $\gamma_2=\gamma_3= C = 0$ ; qualitativement, les résultats sont alors analogues à ceux de Wallis et Bowlden ; en particulier, pour l'une des séries de niveaux de trous lourds, il y a des extrema secondaires en $d \neq 0$ ; de plus, si on calcule les fonctions d'onde, on s'aperçoit qu'à $d \neq 0$ , elles font intervenir des combinaisons linéaires de nombreuses fonctions propres d'oscillateur harmonique ; les règles de sélection deviennent donc encore moins strictes qu'à $d = 0$ , et en particulier, il peut y avoir des transitions entre des niveaux des séries $E_1^{\pm}$ et $E_2^{\pm}$ . Si on ne fait plus l'hypothèse $\gamma_2=\gamma_3= C = 0$ , les résultats se compliquent encore un peu, tout en gardant la même allure (en effet, l'hypothèse isotrope est assez bonne dans le germanium) ; cependant, les fonctions d'onde font intervenir un mélange encore plus complexe de fonctions propres d'oscillateur harmonique, de sorte que l'on peut dire que presque toutes les transitions entre niveaux de nombres quantiques voisins sont permises, avec des probabilités plus ou moins grandes. Ce sont ces transitions qui conduisent en particulier aux raies d'harmoniques.

# IV

# DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET RESULTATS

## IV - 1. Considérations générales

Dans le germanium à température ordinaire, le temps de relaxation est de l'ordre de $10^{-14}$s ($10^{-12}$s pour les échantillons les plus purs) ; il est dû aux collisions contre les impuretés, et surtout contre les phonons. Pour satisfaire à la condition $\omega\tau > 1$ (I,1,8), il faut utiliser des champs électriques de fréquences supérieures à $1{,}5.10^{13}$ Hz qui se placent dans le domaine infrarouge lointain ; ceci n'est pas impossible, mais les inductions magnétiques correspondantes (50 Weber/m$^2$ pour $m^* = 0{,}1\ m_o$) sont difficiles à réaliser ; de plus, la pénétration du champ électrique est limitée par la profondeur de peau $\delta = \sqrt{2/\mu\sigma_o\omega}$ (I,7,1) ; pour du germanium de résistivité $0{,}5\ \Omega m = 50\ \Omega cm$ et une fréquence de $1{,}5.10^{13}$ Hz, on trouve :

$$\delta = 6.10^{-4}\ m = 600\ \mu \quad ;$$

il est mal commode de réaliser des échantillons aussi minces.

Il est possible de tourner ces difficultés en refroidissant l'échantillon : les collisions avec les phonons sont fortement réduites et le temps de relaxation n'est plus limité que par les collisions contre les impuretés. Avec des échantillons très purs, on atteint des temps de relaxation de l'ordre de $10^{-10}$s à 4°K. Les fréquences peuvent alors être plus basses et se placer dans le domaine centimétrique ou millimétrique. Les champs magnétiques sont également plus faibles ; ainsi, pour $\omega = 2.10^{11}\ s^{-1}$ ($f \backsimeq 35000$ MHz , $\lambda \backsimeq 8{,}6$ mm), on a $H \backsimeq 0{,}125$ Weber/m$^2$ pour $m^* = 0{,}1\ m_o$ . De plus, la profondeur de peau augmente, la fréquence étant plus faible et la conductivité diminuant par suite des faibles températures. Les masses effectives ainsi déterminées sont des masses effectives à basse température ; ces masses étant liées à la forme des surfaces d'énergie constante, c'est-à-dire au potentiel cristallin, elles varient peu avec la température, la dilatation du réseau étant faible. Enfin, les basses températures sont indispensables, si on veut étudier les effets quantiques qui se manifestent, si seuls les premiers niveaux de Landau sont peuplés, c'est-à-dire si $\hbar\omega_c \gtrsim kT$ .

En fait, aux basses températures envisagées (hélium liquide), la conductivité est pratiquement nulle, tous les porteurs étant liés aux impuretés, et les bandes de valence et de conduction entièrement vides. Il faut donc créer les porteurs, soit par ionisation ou avalanche (par un courant continu ou par le champ électrique haute fréquence lui-même), soit par photo-ionisation. Cette dernière méthode est la méthode de choix, car elle permet de contrôler le nombre de porteurs créés ; de plus, elle permet de moduler facilement le signal d'absorption en modulant l'illumination de l'échantillon.

Le problème consiste donc finalement à mesurer la constante diélectrique haute fréquence d'un échantillon de germanium à basse température, ou plus précisément ses pertes diélectriques, en fonction de l'induction magnétique. Pour rendre les anomalies de constante diélectriques et les effets de plasma négligeables, il faut que $\nu \gg \nu_p$ (§ I.7) ; en prenant $\omega = 2.10^{11}\ s^{-1}$, $\tau = 2.10^{-10}$ s, $K = 16$ et $m^* = 0,11\ m_o$, (ce qui correspond aux conditions expérimentales moyennes), on trouve $N < 10^{12}$ porteurs/cm$^3$.

Nous avons donc construit un spectrographe pour l'étude de la résonance cyclotron à basse température. Nous allons décrire chacun des éléments de cet appareillage : induction, basses températures, appareillage hyperfréquence 8 mm, modulation et démodulation.

## IV - 2. Induction magnétique

Les raies étudiées étant assez larges ($2B/\Delta B < 50$), et les dimensions des échantillons assez faibles, il n'est pas nécessaire d'avoir des inductions très homogènes (1°/o dans le volume de l'échantillon serait encore acceptable). Par contre, l'induction doit pouvoir être balayée pratiquement depuis zéro jusqu'au champ correspondant à la masse effective maximum que l'on doit observer ; l'induction correspondant à $m^* = 0,1\ m_o$ pour une longueur d'onde $\lambda = 8$mm étant de 0,125 Weber/m$^2$ et $m^*$ étant inférieur à $0,5\ m_o$ dans le germanium, il suffit d'explorer l'induction jusqu'à 0,6 Weber/m$^2$.

a) Electro-aimant et mesure de B : L'électro-aimant utilisé est fabriqué par SIME ; il présente une impédance continue de 11 Ω et se sature à 160 V ; il permet, dans ces conditions, d'avoir un champ de 0,8 W/m$^2$ dans un entrefer de 5 cm environ. Les pièces polaires tronconiques de 5 cm de diamètre donnent une induction suffisamment homogène dans tout le volume de l'échantillon.

L'induction est mesurée à l'aide d'une sonde à effet Hall (fournie par la C.S.F.) alimentée en courant continu. La sensibilité est de $5.10^{-3}$ (Wb/m$^2$)/mV environ pour un courant de 2 mA ; en fait, on ajuste la sensibilité en réglant le courant, de manière à obtenir une calibration directe en masse effective. L'équilibrage à induction nulle se fait suivant le procédé indiqué dans la Réf.31 ; de toute façon, le zéro est vérifié en pointant une même raie pour deux valeurs opposées de l'induction (on opère en polarisation linéaire, de sorte que les raies se retrouvent de part et d'autre de B = 0).

b) Alimentation de l'électro-aimant ; stabilisation et balayage : L'alimentation a d'abord été faite à partir des batteries 120 V du Laboratoire, le réglage se faisant à l'aide de rhéostats placés en série. Mais ce procédé présente de nombreux inconvénients : désagrément du balayage manuel, discontinuité de balayage aux inductions élevées (par suite des sauts du curseur sur les spires), dérives thermiques, et surtout impossibilité d'obtenir des inductions voisines de zéro (par suite du champ rémanent et d'un courant minimum imposé par le rhéostat). C'est pour ces raisons que nous avons réalisé un balayage et une stabilisation électronique de l'induction.

L'électro-aimant utilisé n'étant ni à haute ni à basse impédance, il n'est pas possible d'utiliser un rhéostat électronique à lampes ou à transistors. Nous avons donc utilisé un dispositif à machine tournante : l'électro-aimant est alimenté par une dynamo à excitation séparée, et on contrôle cette excitation en profitant ainsi du gain de la dynamo. La dynamo utilisée est une machine allemande de récupération ; son impédance de sortie est de 15 $\Omega$ (sous 120 V), ce qui convient à peu près, et l'impédance d'excitation est de 60 $\Omega$ (sous 15 V environ), ce qui correspond à un gain en puissance de 250 environ.

Le contrôle de l'excitation se fait à l'aide d'une fréquence porteuse de 200 Hz ; un oscillateur local alimente une sonde à effet Hall placée dans l'entrefer, qui fournit un signal alternatif proportionnel au champ. Ce signal est comparé à un signal de référence de même fréquence ; la différence est amplifiée, puis redressée par une détection synchrone et appliquée à l'excitation de la génératrice (Fig.9).

La détection synchrone est contituée de 4 thyratrons 2D21 successivement bloqués et débloqués par des tensions de phases convenables fournies par l'oscillateur local, et appliquées aux grilles de commande ; les thyratrons sont

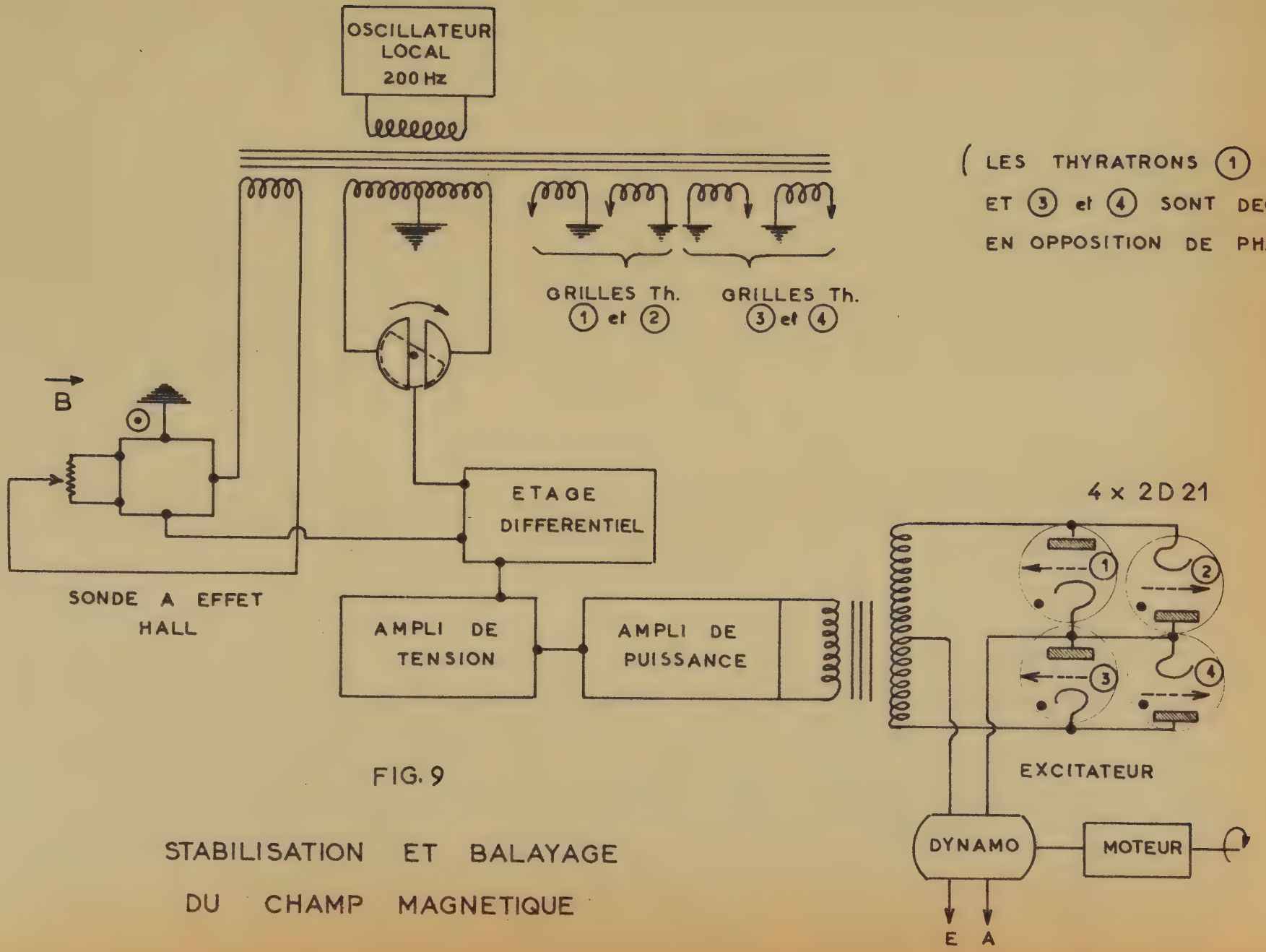



FIG. 9

STABILISATION ET BALAYAGE DU CHAMP MAGNETIQUE

par paires tête-bêche (pour éviter le redressement cathode-anode) (Fig.9) ; le fonctionnement est donc très analogue à celui d'un démodulateur synchrone à vibreur.

Pour obtenir le balayage, il suffit de faire varier la tension de référence. On réalise cela à l'aide d'un diviseur capacitif : deux tensions en opposition de phase sont appliquées à deux séries de plaques fixes d'un condensateur variable, chaque série occupant un demi-cercle (Fig.9), la tension qui apparaît entre les plaques mobiles et le point commun aux deux tensions appliquées est proportionnelle à la différence des capacités des plaques mobiles par rapport à chacune des séries de plaques fixes. On réalise le balayage automatique en entraînant les plaques mobiles par un petit moteur ; en modifiant la forme des plaques mobiles, on peut ainsi choisir une forme de balayage arbitraire (B ou 1/B par exemple variant linéairement).

Le système présente une grande souplesse de balayage, lent automatique à l'aide du moteur, rapide par entraînement manuel. De plus, on peut balayer le champ au voisinage de zéro et inverser son sens sans commutation. Le seul inconvénient est la dérive thermique possible de la sonde à effet Hall de contrôle, et pourrait être évitée par une régulation de la température de celle-ci. Elle n'a présenté aucun inconvénient pour nous. La stabilité obtenue est de l'ordre de $10^{-3}$, ce qui est largement suffisant pour les mesures faites.

## IV - 3. Basses températures : cryostat

Les basses températures utilisées sont obtenues à partir d'hélium liquide. Nous avons donc été conduits à réaliser un cryostat à hélium liquide et un système de pompage sur l'hélium liquide avec régulation de pression.

a) Cryostat : il est entièrement métallique, de conception assez classique : doubles parois, isolement à vide, garde d'azote annulaire et queue de mesure démontable (Fig.10). Le vide d'isolement est entretenu par une petite pompe à diffusion. La consommation d'hélium est, en fonctionnement, guides d'ondes en place, de 0,15 litre d'hélium liquide par heure d'environ.

Le seul point particulier est la fenêtre optique qui se trouve à la partie inférieure du cryostat ; la fenêtre extérieure en quartz est rendue étanche à l'aide d'un joint torique. La même solution n'est pas applicable à la fenêtre intérieure, également en quartz, qui est refroidie à $4^{\circ}K$ : nous avons

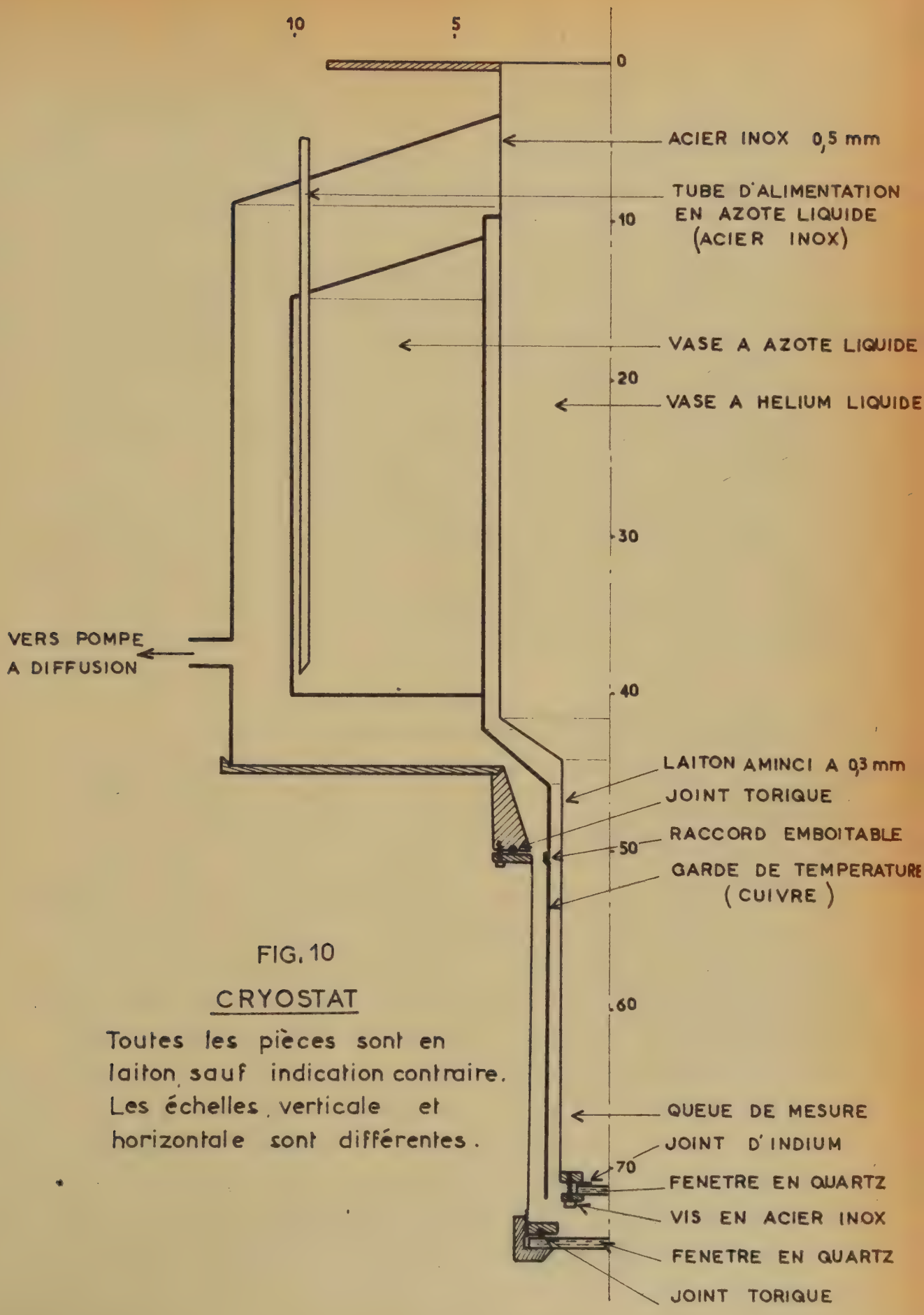



FIG. 10

CRYOSTAT

Toutes les pièces sont en laiton sauf indication contraire. Les échelles verticale et horizontale sont différentes.

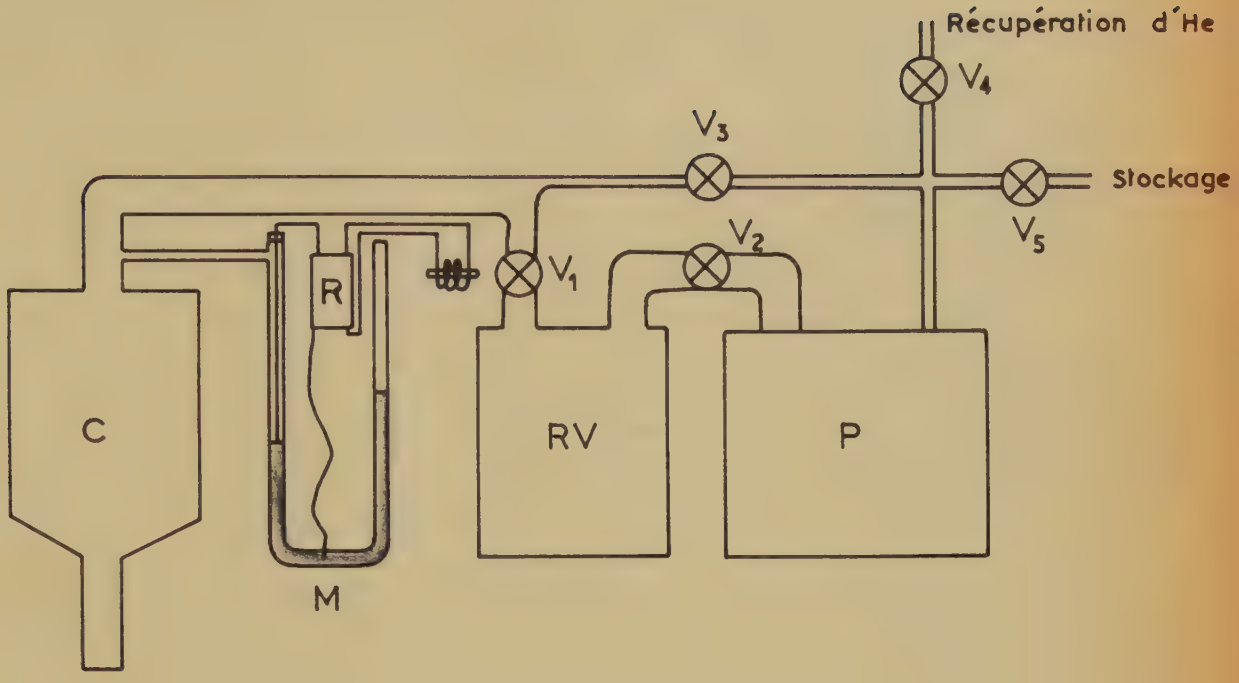
utilisé un joint d'indium laminé, écrasé par serrage de vis en acier inoxydable ; bien que travaillant à la traction, ce joint n'a jamais présenté de fuite, malgré les nombreux réchauffements et refroidissements qu'il a subi . La fenêtre étant placée assez loin de l'entrefer, la supraconductivité de l'indium ne nous a pas gênés.

Un problème pratique important avec des cryostats métalliques, la mesure de la hauteur d'hélium liquide, a été résolu à l'aide de résistances de carbone aggloméré de marque ALLEN-BRADLEY, dont le coefficient de température 1/R (dR/dT) est de l'ordre de 2 ou 3 à 4°K. Il suffit alors de mesurer les valeurs d'une série de résistances placées à des hauteurs différentes dans le cryostat. Il y a d'ailleurs un compromis à réaliser entre la puissance nominale de la résistance et le courant utilisé pour la mesurer ; en effet, il faut qu'une résistance située au-dessus du niveau d'hélium liquide soit réchauffée par la dissipation électrique et non refroidie par le flux d'hélium gazeux ; par contre, une résistance située dans le sein de l'hélium liquide doit être refroidie et l'échauffement par dissipation électrique doit être négligeable. Pratiquement, nous avons utilisé des résistances de 50 Ω , 1/2 W , et un courant de l'ordre de 10 mA.

b) Pompage sur l'hélium liquide et régulation de pression : Pour obtenir des températures inférieures au point d'ébullition normal de l'hélium (4,2°K), on pompe pour faire bouillir l'hélium sous pression réduite. Malheureusement, les températures que l'on peut ainsi atteindre sont limitées par la faible tension de vapeur de l'hélium d'une part et par la transformation de l'hélium liquide en variété superfluide à 2,16°K d'autre part : il se forme alors un film superfluide qui monte le long des parois et qui s'évapore aux points chauds en limitant la pression. A l'aide d'une pompe de 28 $m^3$/heure, nous avons réussi à atteindre une pression de 6 mm de mercure, ce qui correspond à 1,6°K environ [32]. La pression sur le vase à hélium est régulée à l'aide d'un dispositif simple à vanne électro-magnétique (Fig.11).

## IV - 4. Circuit hyperfréquence

Nous avons choisi la bande Q ($\lambda \simeq 8{,}6$ mm , $f \simeq 35000$ MHz), car elle conduit à des inductions raisonnables (0,125 W/$m^2$ pour $m^* = 0{,}1\ m_o$), tout en assurant une augmentation du facteur $\omega\tau$ de surtension des raies par rapport




C : Cryostat
M : Manomètre à mercure à contacts
R : Relais
RV : Réserve à vide
P : Pompe à vide ( 28 $m^3$/ h )
$V_1$ : Vanne électromagnétique commandée par le manomètre par l'intermédiaire du relais R
$V_2$ : Vanne réglant le débit de la pompe et permettant de régler l'amortissement de la régulation
$V_3$ : By-pass
$V_4$ : Vanne de raccordement à la conduite de récupération d'hélium
$V_5$ : Vanne de raccordement du vase de stockage d'hélium liquide à la conduite de récupération

REGULATION DE PRESSION SUR HELIUM LIQUIDE

FIG. 11

cavité) ; c'est cette dernière condition qui est la plus difficile à réaliser, l'entrefer de l'électro-aimant étant limité. Il est néanmoins possible de surmonter ces difficultés (à l'aide d'une induction axiale créée par un solénoïde ou d'une cavité couplée sur un côté du guide), et des spectrographes à polarisation circulaire ont été décrits [4][33]. Il est plus simple, et c'est la solution que nous avons choisie, d'utiliser une onde polarisée linéairement (mode $TE_{10}$ ou $H_{10}$ normal d'un guide rectangulaire) ; en effet, cette onde peut être décomposée en deux composantes circulaires polarisées en sens inverse (§ I.1) ; à la résonance, une seule de ces composantes est absorbée.

Il s'agit donc d'amener le circuit hyperfréquence dans la région de basse température, dans une position convenable par rapport à l'induction magnétique (grand côté du guide parallèle à l'induction), et y placer l'échantillon [illegible].

Le guide traverse le couvercle du cryostat ; un joint de mylar placé en travers en assure l'étanchéité ; il descend ensuite à l'intérieur de l'enceinte à hélium, et arrive dans la queue du cryostat placé dans l'entrefer. Pour éviter une trop grosse capacité thermique, la partie inférieure est en guide de cuivre argenté intérieurement, et aminci à 0,5 mm ; les fuites thermiques sont réduites en plaçant entre le guide aminci et le couvercle des portions de guide en monel mince (0,3 mm), emboutiesur une forme usinée spécialement. Le circuit plongeant dans l'hélium liquide, pour éviter que le liquide n'y pénètre, il est rempli de polystyrène expansé, dont la constante diélectrique est très voisine de 1.

Pour introduire l'échantillon dans le circuit, on peut, par analogie avec les spectrographes à résonance paramagnétique, placer l'échantillon dans une cavité résonante couplée au guide : on mesure la variation de surtension de la cavité en détectant la puissance réfléchie. C'est la solution adoptée sur tous les spectrographes décrits jusqu'à maintenant [4, 5, 33, etc.], et c'est celle qui a été utilisée sur la première forme du spectrographe que nous avons réalisé[34] : une cavité parallélipipédique en $\lambda/2$ est couplée au guide par un iris ; l'échantillon est placé au centre de la cavité, à l'endroit du champ électrique maximum, au bout d'une tige de quartz qui sert à amener la lumière de modulation.

L'utilisation d'une cavité présente cependant de nombreux inconvénients. Son avantage essentiel qui est l'augmentation de la sensibilité d'un facteur

égal au facteur de surtension Q de la cavité, est lui-même assez illusoire ; en effet, toutes choses égales par ailleurs, l'absorption cyclotron est $10^{12}$ fois plus forte que l'absorption de spin [4] ; en fait, cet avantage n'est pas aussi important, par suite des concentrations de porteurs plus faibles en résonance cyclotron, mais subsiste cependant ; pour avoir des variations relatives $\Delta Q/Q$ du facteur de surtension faibles (pour rester dans le domaine linéaire), on est donc conduit à utiliser des échantillons de très petites dimensions ; on perd donc sur le facteur de remplissage ce que l'on regagne sur la sensibilité (dans le spectrographe de la Réf.34, le facteur de remplissage est inférieur à 0,5°/o). D'autre part, la fréquence de résonance de la cavité peut varier (effets dispersifs accompagnant la résonance, formation de bulles d'hélium gazeux, dilatation thermique) ; il est donc nécessaire de pouvoir régler la fréquence de résonance en fonctionnement (tringlerie qui permet de visser des vis de correction dans la cavité), et de stabiliser la fréquence de travail sur cette fréquence. Enfin, l'un des plus gros inconvénients de l'utilisation d'une cavité vient à ce que les champs électriques qui y règnent sont multipliés par la racine carrée du facteur de surtension par rapport à ceux qui règnent dans le guide, ce qui peut avoir pour effet d'échauffer les porteurs (cf. § I.8) ; dans un guide de section ab, le champ électrique maximum $\mathcal{E}_o$ est donné en fonction de la puissance P par :

$$\frac{P}{\mathcal{E}_o^2} = 6{,}63.10^{-4}\ ab\ \frac{\lambda}{\lambda_g} \quad , \qquad (IV,3,1)$$

(où $\lambda$ et $\lambda_g$ sont les longueurs d'onde dans le vide et dans le guide) ; pour les guides utilisés (RG 96/V , a = 7,112.$10^{-3}$ m , b = 3,556.$10^{-3}$ m), et une fréquence de 35000 MHz, on a :

$$\mathcal{E}_o^2 = 7{,}35.10^{7}\ P \quad . \qquad (IV,3,2)$$

Dans la cavité, le champ est multiplié par $\sqrt{Q}$ , de sorte que la formule (I,8,3) peut se mettre sous la forme

$$\frac{T_c}{T}\left(\frac{T_c}{T} - 1\right) \simeq 4.10^{3}\ Q\ P \quad , \qquad (IV,3,2)$$

(où on a pris $m^* \simeq 0{,}1\ m_o$ , $\tau = 10^{-10}$ s , $\gamma = 5.10^{3}$ m/s , $\tau_p \simeq 10^{-9}$ s donné par la formule (I,8,4). On voit qu'avec une cavité de surtension Q = 1000, les effets d'échauffement ne commencent à devenir négligeables qu'à partir de

$10^{-7}$ W ; ces faibles puissances conduisent à des difficultés de détection, et il faut utiliser des récepteurs très sensibles.

Nous avons donc abandonné l'utilisation d'une cavité, en plaçant directement l'échantillon dans le guide, et en mesurant ses pertes par transmission. Toutes choses restant égales par ailleurs, les puissances utilisables sont Q fois plus grandes (en particulier, les effets d'échauffement commencent à disparaître à partir de $10^{-4}$ W). La disposition utilisée est la suivante (Fig.12) : le guide d'onde est coudé deux fois dans le plan E, en forme d'épingle à cheveux ; la partie horizontale inférieure se trouve dans la queue du cryostat ; la grande face du guide étant horizontale, le champ électrique haute fréquence est vertical et perpendiculaire à $\vec{B}$ quel que soit l'orientation relative de la portion horizontale et de $\vec{B}$. L'échantillon est placé dans le guide sous forme de plaquette dans un plan E passant par l'axe du guide (c'est la position utilisée pour les plaquettes absorbantes dans les atténuateurs) ; il y pénètre par une fente longitudinale et peut être éclairé par en dessous à travers une autre fente. L'échantillon est aminci à ses extrémités pour réaliser une meilleure adaptation à l'impédance du guide ; ses dimensions typiques sont 10x5x1 mm soit un volume 300 fois plus grand que dans le cas d'une cavité : la perte de sensibilité par suite de la supression de la cavité est donc presque compensée par le remplissage. La disposition adoptée présente encore l'avantage de pouvoir facilement faire varier l'orientation de $\vec{B}$ par rapport à l'échantillon, en faisant tourner l'ensemble du couvercle et des guides autour d'un axe vertical ; en particulier, on peut faire prendre à B toutes les orientations d'un plan (110) en plaçant l'échantillon avec un axe [110] vertical.

Dans les premières expériences avec ce dispositif, nous avons été gênés par des effets dispersifs variables avec le niveau d'hélium dans le cryostat ; nous les avons attribués à des réflexions parielles se produisant aux coudes et surtout aux raccordements des tronçons de guide en monel : il se formerait une cavité résonant sur un mode très élevé, dont la fréquence de résonance dépend de sa longueur et qui serait donc variable avec la dilatation thermique des longues portions de guide vertical. En effet, ces effets ont disparu en plaçant des atténuateurs de 5 dB environ de part et d'autre de l'échantillon (ce sont de petites plaquettes imprégnées de suspension colloïdale de graphite, et placées dans un plan E (Fig.12).

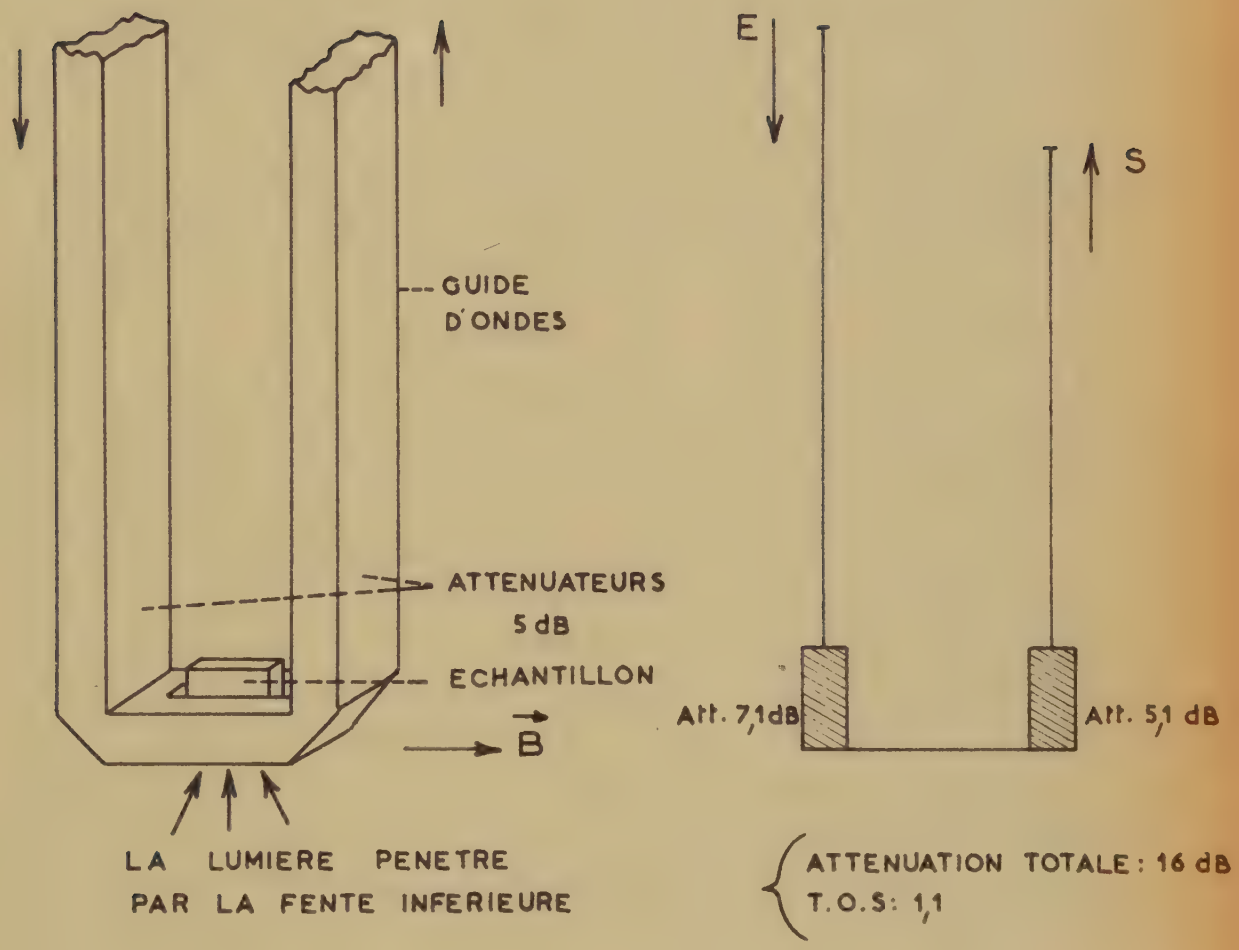

GUIDE
D'ONDES
ATTENUATEURS
5 dB
ECHANTILLON
B
LA LUMIERE PENETRE
PAR LA FENTE INFERIEURE
E
S
Att. 7,1dB
Att. 5,1 dB
ATTENUATION TOTALE : 16 dB
T.O.S : 1,1

FIG. 12

c) Détection : Le signal à étudier est en général superposé à un signal parasite que l'on appelle le bruit ; ce bruit provient de la source, ou d'éléments placés entre la source et le détecteur. D'autre part, le détecteur lui-même peut introduire du bruit ; en l'absence de signal à l'entrée, il donne à la sortie une indication due à son bruit propre. Quand le bruit devient plus élevé que le signal, celui-ci est "noyé" et ne peut plus être étudié.

En faisant abstraction du bruit transporté par le signal, on peut caractériser un détecteur par sa sensibilité, c'est-à-dire par le signal minimum qui donne une indication égale à celle due au bruit.

1) Détecteur à cristal : C'est le détecteur le plus simple et le plus largement utilisé. En général, il a une caractéristique quadratique ; autrement dit, son courant de court-circuit est proportionnel à la puissance incidente :

$$i = \beta P \quad ; \qquad (IV,3,3)$$

en fait, les caractéristiques peuvent s'écarter de cette loi (les cristaux I.T.T. CR4T4 que nous avons utilisés s'écartent de la réponse quadratique au-dessus de 1 µW ; la caractéristique devient alors voisine de $i = \beta' P^{0,75}$). Le bruit introduit par le cristal peut être d'origines diverses : bruit "blanc" Johnson pour lequel on peut définir une résistance de bruit équivalente et une température de bruit, bruit Shottky en 1/f, etc. La caractéristique quadratique et la présence du bruit en 1/f important en basse fréquence font qu'il est mal commode de définir un facteur de bruit comme on le fait pour un récepteur superhétérodyne (voir plus loin). Tout au plus, peut-on définir une sensibilité dans les conditions d'emploi. Avec une modulation basse fréquence, il est difficile d'avoir mieux que $10^{-8}$ W/cycle pour une détection par cristal. Pour avoir un rapport signal sur bruit raisonnable, ceci peut être insuffisant ; il est nécessaire de faire alors appel à un récepteur superhétérodyne.

2) Récepteur superhétérodyne : On réalise le mélange du signal avec un signal produit par un oscillateur auxiliaire de fréquence voisine à l'aide d'un cristal mélangeur, et on amplifie les battements à fréquence intermédiaire. Les avantages du dispositif viennent d'une part de ce que la détection est alors linéaire, et d'autre part de ce que le bruit en 1/f du cristal mélangeur devient négligeable devant son bruit Johnson (si la fréquence intermédiaire est assez élevée). Le procédé risque d'introduire le bruit de l'oscillateur local;

mais il est facile de l'éliminer par un mélangeur symétrique où le signal local arrive en opposition de phase sur les mélangeurs, tandis que le signal à étudier y arrive en phase. Si l'amplificateur à fréquence intermédiaire est à faible bande, il faut asservir la fréquence de l'oscillateur local sur celle de l'oscillateur de travail.

Pour un récepteur linéaire, on peut définir un facteur de bruit F : étant donné une source de bruit à l'entrée, c'est le rapport de la puissance de bruit P qu'il délivre à la puissance de bruit $P_i$ qu'il délivrerait s'il était idéal, c'est-à-dire s'il n'introduisait lui-même aucun bruit :

$$F = P/P_i \quad . \qquad (IV,3,4)$$

Si $\Delta f$ est la bande passante du récepteur, G le gain en puissance et $KT\Delta f$ la puissance de bruit à l'entrée dans la bande $\Delta f$, la puissance de bruit à la sortie est

$$P = F\,G\,K\,T\,\Delta f \quad ; \qquad (IV,3,5)$$

on voit que cette puissance est FG fois plus grande qu'à l'entrée, alors que la puissance de signal n'est que G fois plus grande ; on a donc intérêt à avoir F aussi voisin de 1 que possible.

On peut montrer [35] que, si on a plusieurs éléments en série de facteurs de bruit $F_1$ , $F_2$ , ... et de gains $G_1$ , $G_2$ , ... (la bande passante de l'ensemble est l'intersection de toutes les bandes passantes), on a :

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1\,G_2} + \ldots \quad ; \qquad (IV,3,6)$$

on voit que, pour peu que le gain $G_1$ du premier élément soit assez élevé (et le facteur de bruit du second pas trop grand), le seul facteur de bruit important est celui de cet élément.

Dans un récepteur superhétérodyne, on a en série le mélangeur à cristaux (caractérisé par un facteur de bruit $F_M$ et un gain 1/L , qui est en fait une perte par conversion L) et l'amplificateur à fréquence intermédiaire (de facteur de bruit F, qui, d'après ce qui précède, est pratiquement le facteur de bruit de son étage d'entrée). Le facteur de bruit du récepteur peut s'écrire :

$$F = F_M + (F - 1)\,L \quad ; \qquad (IV,3,7)$$

on a donc intérêt à avoir des cristaux mélangeurs à faible facteur de bruit et

faibles pertes par conversion d'une part, et un amplificateur à faible bruit d'autre part, ce qui conduit à des étages d'entrée du type cascode.

Nous avons réalisé un récepteur superhétérodyne dans la bande Q : l'oscillateur local est un des klystrons déjà mentionnée ; le mélangeur symétrique ([illegible]) est [illegible] d'un transformateur d'adaptation pour cristaux spécifié par [illegible] ; les cristaux mélangeurs utilisés sont des 1N53 de SYLVANIA (pertes par conversion de 8 dB environ, rapport de températures de bruit : 2,5) ; l'amplificateur à fréquence intermédiaire est de marque L.E.L. (IF21), il a une bande passante de 2 MHz à 30 MHz, le facteur de bruit donné par le constructeur est de 1,4 dB, mais après remplacement des tubes, nous n'avons mesuré que 2 dB. Le récepteur peut être découplé du reste du circuit par un isolateur à ferrite (2640 IF de la C.S.F., 3 dB de pertes directes environ, 25 dB de pertes inverses minimum). Le facteur de bruit du récepteur ainsi réalisé peut être calculé à l'aide de la formule (IV,3,7) :

$$F = \left[2,5 + (1,6 - 1)\right] 6,3 \simeq 20 \quad ,$$

soit 13 dB environ ; la puissance de bruit est donc $2.10^{-13}$ W pour la bande passante de l'amplificateur.

L'évaluation finale de la sensibilité du récepteur est compliquée par le fait que l'amplificateur à fréquence intermédiaire est suivi d'un détecteur quadratique ; si le bruit introduit par le détecteur est négligeable, il produit par contre une modification de la densité spectrale de bruit, et la détection synchrone à la fréquence de modulation qui le suit ne peut pas être considérée comme un simple filtrage réduisant la bande passante. En renvoyant à des traités spécialisés (voir par exemple Réf.35), il sera suffisant pour nous de remarquer que la sensibilité sera meilleure que $10^{-13}$ W, ce qui est suffisant pour obtenir un rapport signal sur bruit convenable sans avoir d'effets d'échauffement.

d) Stabilisation de fréquence : le problème de la stabilisation de la fréquence d'un klystron se pose, soit que l'on désire travailler à fréquence fixe (stabilisation absolue) à la fréquence de résonance d'une cavité (qui peut être la cavité de travail), soit que l'on désire que cette fréquence soit invariablement liée à une fréquence de travail (stabilisation différentielle) de manière à ce que des battements restent dans la bande passante de l'amplificateur à fréquence intermédiaire (cas d'un récepteur superhétérodyne). Une telle

stabilisation peut être réalisée en utilisant l'accord électronique du klystron par sa tension réflecteur. De manière générale, une stabilisation de fréquence comporte un discriminateur de fréquence qui transforme une erreur de fréquence en tension d'erreur que l'on applique, après amplification et dans le sens convenable, au réflecteur ; mais une telle stabilisation est difficile à réaliser en continu, surtout par suite du potentiel continu élevé du réflecteur des klystrons utilisés ; on peut alors moduler la fréquence au voisinage de la fréquence à stabiliser, et après discriminateur et amplification, effectuer une démodulation synchrone avant d'appliquer la tension au réflecteur.

Nous avons réalisé une telle stabilisation ; seul, le discriminateur diffère pour chaque usage. La fréquence de modulation de 300 kHz choisie autorise une bande passante assez large, et permet d'utiliser des condensateurs d'isolement haute tension de faible capacité pour amener le signal au potentiel du réflecteur. La figure 13 donne un diagramme de l'ensemble ; on voit que les éléments au potentiel du réflecteur sont groupés sur un chassis isolé ; la phase de la tension de référence du démodulateur peut être inversée suivant la phase du signal donné par le discriminateur ; des sorties (marquées X et Y) permettent de contrôler le fonctionnement avec un oscilloscope ; un oscillateur auxiliaire non figuré fournit une tension de balayage basse fréquence pour observer le mode du klystron dans les réglages préliminaires.

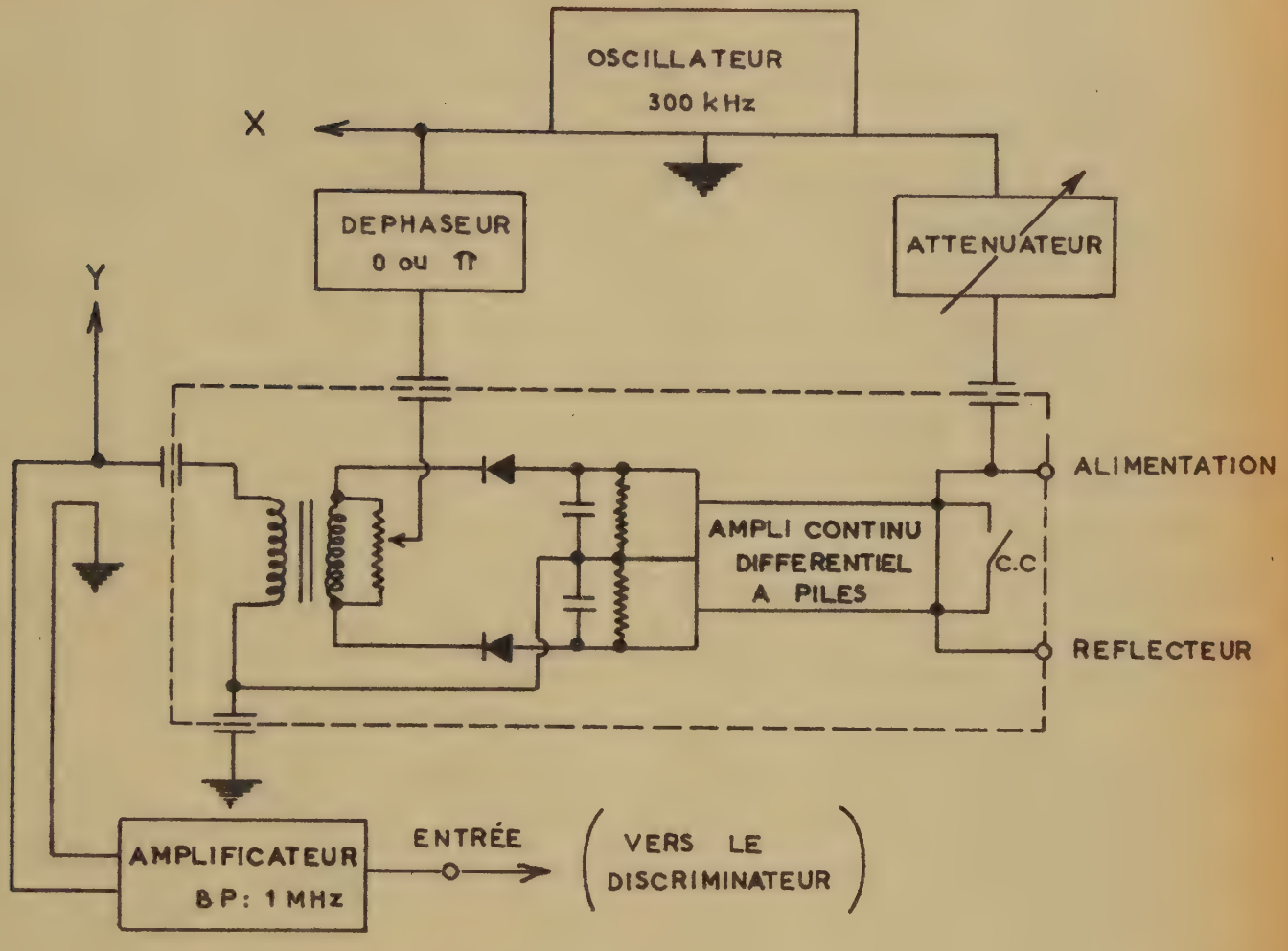
Le discriminateur est différent pour chaque utilisation : c'est la courbe de réponse d'une cavité (apparaissant en émission dans le cas de l'ondemètre à transmission utilisé, ou en absorption dans le cas de la cavité de travail), ou la courbe de réponse de l'amplificateur à fréquence intermédiaire dans le cas du récepteur superhétérodyne. Dans chaque cas, l'accrochage est contrôlé par l'apparition d'un "huit" sur l'oscilloscope de contrôle, provenant du doublage de fréquence au voisinage du sommet de la courbe de réponse utilisée comme discriminateur (voir Fig. 13).

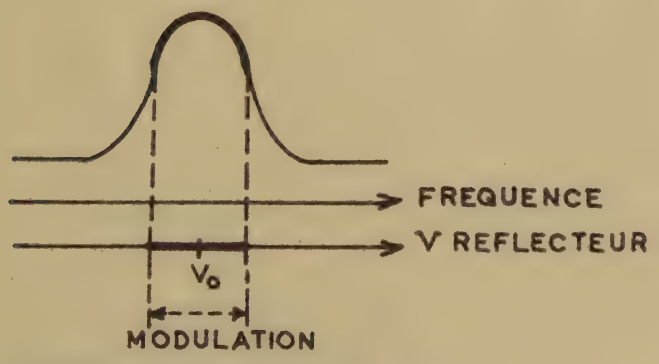
IV - 5. Modulation lumineuse. Démodulation basse fréquence

Nous avons déjà indiqué que le moyen le plus simple pour créer des porteurs dans les échantillons à basse température est de les illuminer. Cette illumination est obtenue avec une lampe à filament de tungstène (750 W) ; une série de lentilles et des renvois d'angle à miroirs permettent de focaliser la lumière sur l'échantillon, à travers les fenêtres du cryostat et la fente du

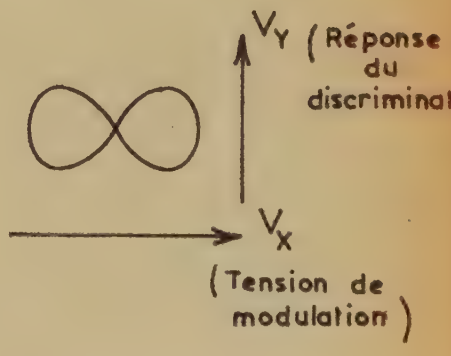
FIG. 13

# STABILISATION DE FREQUENCE D'UN KLYSTRON




DISCRIMINATEUR (courbe de réponse de l'ampli F.I. par exemple)




ECRAN DE L'OSCILLOSCOPE DE CONTROLE

guide. On peut placer des filtres sur le trajet et étudier la région spectrale responsable de l'ionisation. De plus, on en profite pour moduler l'absorption en modulant le faisceau lumineux à l'aide d'un hacheur : un disque à trois secteurs, placé en un point de convergence, est entraîné par un moteur synchrone triphasé 1500 t/minute, et module le faisceau à 75 Hz. Simultanément, le hacheur permet d'obtenir un signal de même fréquence et de phase fixe à l'aide d'une photo-diode ; ce signal, mis en forme (par un amplificateur sélectif 75 Hz) et déphasé convenablement, sert de référence à une détection synchrone à vibreur.

Le signal, après détection quadratique à la sortie de l'amplificateur à fréquence intermédiaire, est envoyé dans un amplificateur sélectif 75 Hz, puis dans la détection synchrone à vibreur. En fait, l'amplificateur sélectif ne sert qu'à supprimer les harmoniques impairs qui pourraient être détectés par la démodulation synchrone, et pourrait être remplacé par un filtre passe-bas.

Après détection, le signal est envoyé sur la voie X d'un enregistreur XY MECI, la tension délivrée par la sonde à effet Hall étant envoyée sur la voie Y. En calibrant la sensibilité Y, on obtient directement un enregistrement du spectre de masses effectives.

La figure 14 donne un schéma d'ensemble du spectromètre, la figure 15 une photographie de l'ensemble expérimental, tandis que la figure 16 montre une vue du dispositif hyperfréquence avec la source et le récepteur superhétérodyne.

IV - 6. Résultats expérimentaux

La résonance cyclotron dans la bande de valence du germanium a beaucoup été étudiée. Les premiers résultats (4, 5, etc.) sont "classiques" : aucune précaution spéciale n'est prise pour éviter l'échauffement, et on ne peut pas espérer observer les effets quantiques sensibles sur les tout premiers niveaux. Le premier travail sur les effets quantiques est celui de Fletcher, Yager et Merritt (36) ; en utilisant des puissances très faibles et probablement un récepteur superhétérodyne, ces derniers ont pu observer en polarisation circulaire une structure complexe des raies de trous ; cependant, leurs résultats qui sont "des moyennes de nombreux enregistrements" sont peu sûrs. Plus récemment, Hensel (37) a signalé avoir fait des observations qui confirment celles de Fletcher, Yager et Merritt et les complètent, mais il ne donne aucun détail.

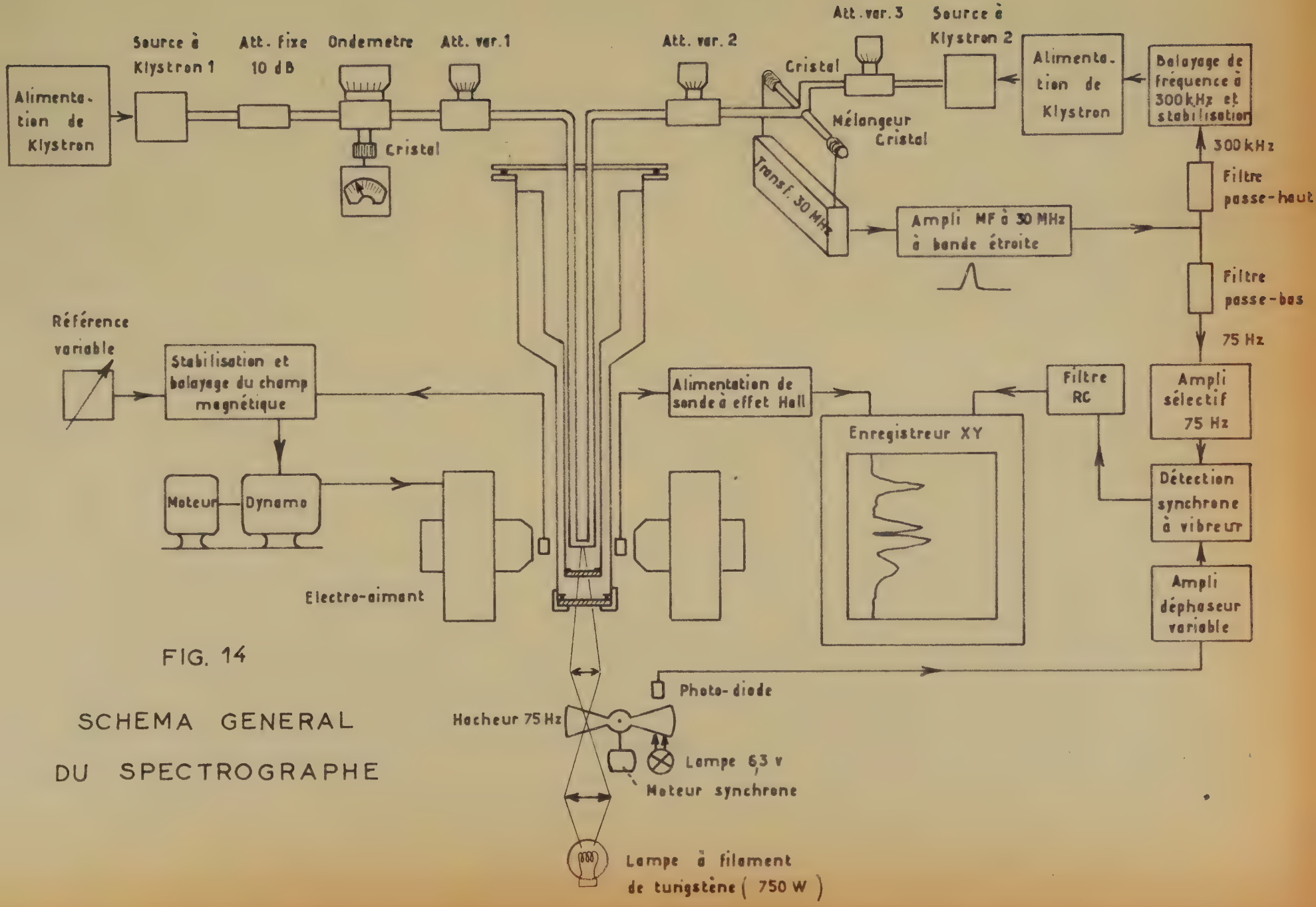



FIG. 14

SCHEMA GENERAL

DU SPECTROGRAPHE

5
6
2
8
3
1
4

1
2
4
3
5

En utilisant le dispositif que nous venons de décrire, nous avons observé des raies [illegible] dont nous allons donner la description.

a) Echantillon : Le choix des échantillons est très important. En effet, nous avons rencontré les mêmes difficultés que Fletcher, Yager et [illegible] pour observer les raies des trous à basse température, quand la population des premiers niveaux devient favorable à l'observation des effets quantiques ($kT \simeq \hbar\omega = 1{,}25.10^{-4}$ eV , soit $T \simeq 1{,}45^{\circ}K$) : les raies observées à $4{,}2^{\circ}K$ disparaissent progressivement quand on descend en température, et vers $2^{\circ}K$, elles sont complètement noyées dans le bruit.

Nous avons étudié cette variation de l'intensité des raies entre $4{,}2^{\circ}K$ et $1{,}8^{\circ}K$. Quelques résultats sont montrés sur la figure 17 où on a porté le logarithme de l'intensité intégrée I en fonction de 1/T ; dans cet intervalle de température, la variation est sensiblement en $\exp -E_o/kT$ où $E_o$ est de l'ordre de $5.10^{-4}$ eV ; cette énergie d'excitation dépend de la pureté des échantillons, de la nature des porteurs (elle est en général plus grande pour les trous qui disparaissent plus rapidement que les électrons) et de l'orientation de l'induction magnétique par rapport aux axes cristallographiques. Fletcher Yager et Merritt attribuent cette disparition à la présence de pièges qui seraient situés dans la bande interdite. Nous pensons que ces pièges pourraient être analogues à l'ion hydronium $H^-$ dans l'approximation hydrogénoïde des impuretés. L'ordre de grandeur de l'énergie d'activation est correct (les énergies de formation de $H^-$ et $H^+$ sont 0,71 eV et 13,6 eV respectivement ; l'énergie d'ionisation d'une impureté étant de l'ordre de $10^{-2}$ eV, les niveaux associés aux impuretés hydronium seraient à $10\text{-}2.\frac{0{,}71}{13{,}6} \simeq 5.10^{-4}$ eV). Cependant, le raisonnement est sans doute simpliste, et il faudrait faire une analyse quantique du phénomène, ce qui introduirait sans doute une anisotropie et une variation de l'énergie d'activation avec la densité d'impuretés (par formation d'une "bande" assez large). Toujours est-il que l'importance de ces pièges doit décroître quand la pureté croît, leur saturation devenant de plus en plus facile.

Nous n'avons pas poursuivi une étude systématique de ce phénomène ; avec des échantillons très purs, il devenait sans inconvénients pour nous : avec le germanium "intrinsèque" (40 $\Omega$cm) obtenu par cristallisation de zone que nous avons utilisé, l'intensité des raies reste acceptable à $1{,}8^{\circ}K$. Cette amélioration de la pureté des cristaux va d'ailleurs dans le sens favorable à l'augmentation de la surtension des raies.

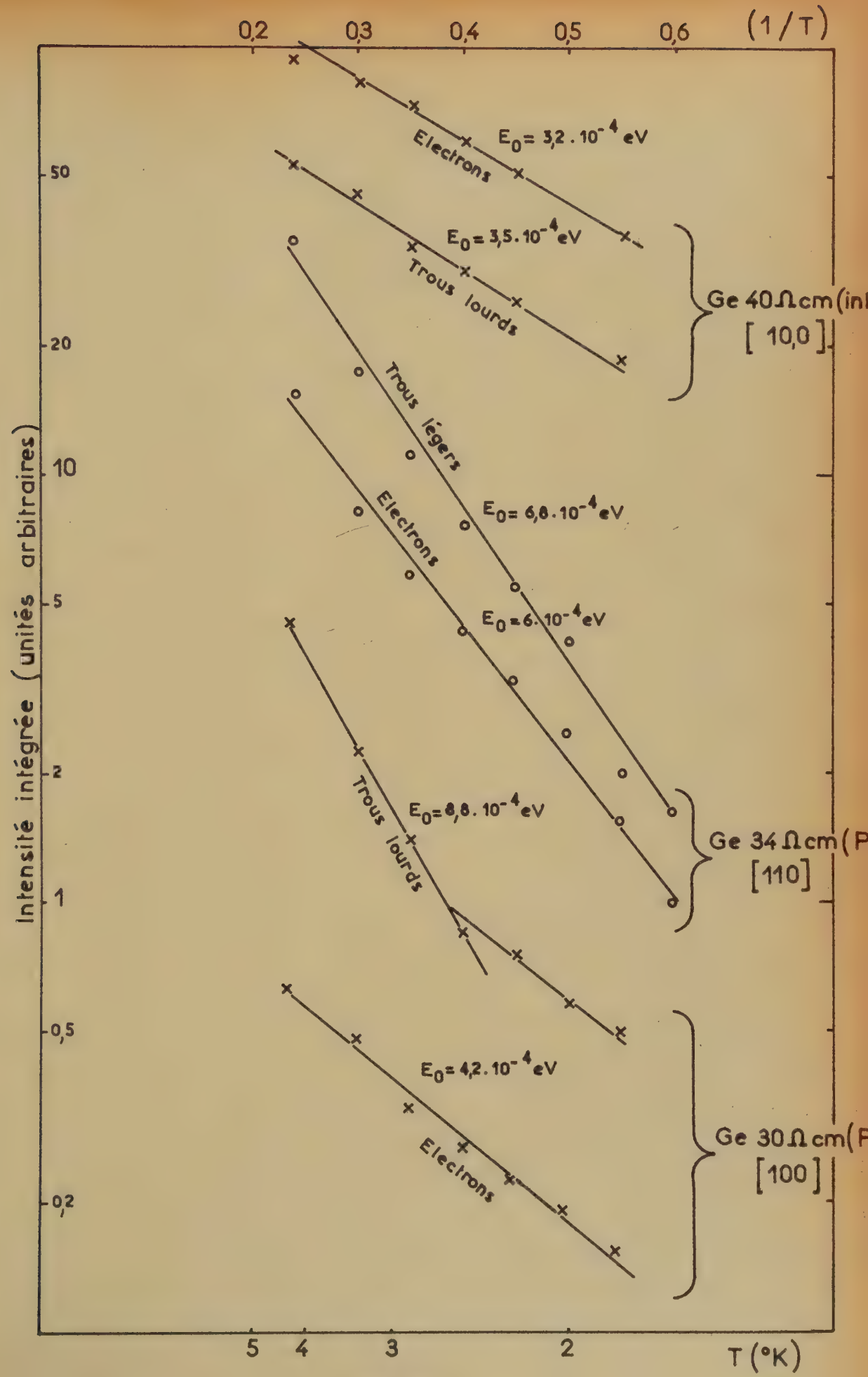

0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
(1/T)
Intensité intégrée (unités arbitraires)
50
20
10
5
2
1
0,5
0,2
Electrons
$E_0 = 3,2 . 10^{-4}$ eV
$E_0 = 3,5 . 10^{-4}$ eV
Trous lourds
Ge 40 Ω cm (in
[ 10,0 ]
Trous légers
$E_0 = 6,8 . 10^{-4}$ eV
Electrons
$E_0 = 6 . 10^{-4}$ eV
Trous lourds
$E_0 = 8,8 . 10^{-4}$ eV
Ge 34 Ω cm (P
[110]
$E_0 = 4,2 . 10^{-4}$ eV
Electrons
Ge 30 Ω cm (P
[100]
5
4
3
2
T (°K)

FIG. 47

Pour étudier l'anisotropie des raies avec $\vec{B}$ dans un plan (110), les échantillons sont découpés en forme de plaquettes dans un plan (110) ; après polissage et attaque au $CF_4$, ils sont montés dans le guide d'onde avec un axe [110] vertical, et maintenus par un support en téflon.

b) Résultats expérimentaux : Le spectre de masses effectives cyclotron du germanium a été étudié en fonction de l'angle $\theta$ que forme $\vec{B}$ situé dans un plan (110) avec l'axe [100]. Nous avons déjà signalé les précautions à prendre pour éviter l'échauffement des porteurs (§ IV.3) ; pratiquement, les effets d'échauffements se manifestent d'une part par un élargissement des raies (augmentation du temps de relaxation), d'autre part par la disparition de certaines raies nouvelles. Avec le dispositif utilisé, ces effets disparaissent en dessous de $10^{-4}$ W au niveau de l'échantillon, ce qui est en bon accord avec l'ordre de grandeur calculé au § IV.3. La plupart des enregistrements sont faits avec des puissances inférieures à $10^{-5}$ W au niveau de l'échantillon.

Quand l'échauffement devient très important, il peut apparaître un autre effet : l'ionisation par choc des impuretés. Avec le dispositif utilisé, nous avons observé cette ionisation au-dessus de $10^{-2}$ W environ, ce qui correspond à des champs de 850 V/m ; c'est l'ordre de grandeur des champs d'avalanche dans le germanium à très basse température (avec une cavité, l'ionisation des impuretés a lieu vers $10^{-4}$ W). Au début de l'ionisation, il apparaît une instabilité qui, avec des conditions de puissance critiques, peut donner lieu à des oscillations d'une fréquence de l'ordre de 10 kHz ; dans certains cas, ces oscillations ont une allure sinusoïdale ; d'autres chercheurs ont observé cette instabilité [39], et l'attribuent à une relaxation de la température électronique.

Les enregistrements sont faits en faisant varier l'orientation de quelques degrés à chaque fois ; l'orientation précise est répérée après enregistrement, grâce aux raies d'électrons ; celles-ci sont bien connues [4][5], et permettent de tracer les courbes de variation de $m_c^*$ en fonction de $\theta$. L'orientation est obtenue en utilisant une échelle logarithmique en ordonnées : il suffit de placer les points correspondant aux positions des raies d'électrons observées sur les courbes, en faisant glisser un réglet vertical ; l'abscisse du réglet, quand la coïncidence est réalisée, donne l'orientation ; l'erreur est inférieure à 1°. De plus, on obtient ainsi un calibrage direct des positions des raies en masses effectives (par comparaison de l'échelle des masse effectives et de l'échelle où sont répérées les positions). Enfin, l'une des courbes de variation

de la masse effective des électrons (celle qui va de $m^* \simeq 0,136\ m_o$ pour $[100]$ à $m^* \simeq 0,360\ m_o$ pour $[110]$) se dédouble si $\vec{B}$ n'est pas dans un plan (110) ; le dédoublement de la raie correspondante permet donc de vérifier l'alignement de $\vec{B}$ dans (110).

Les enregistrements sont en général faits à deux températures : 4,2°K (He bouillant sous pression normale) et 1,8°K (He superfluide sous pression de quelques millimètres). Parfois, des enregistrements sont faits à des températures intermédiaires, en particulier pour étudier la largeur et l'intensité des raies en fonction de la température.

Les figures 18, 19 et 20 sont des reproductions d'enregistrements avec $\vec{B}$ dans les trois directions principales ; les unités d'absorption sont arbitraires. Les enregistrements en trait plein sont faits à 4,2°K, ceux en pointillé à 1,8°K. A quelques détails près, les résultats de Fletcher, Yager et Merritt [36] sont confirmés. A 4,2°K, les raies de trous lourds sont dissymétriques, ce qui est en accord avec les observations de Zeiger, Lax et Dexter [19] ; à 1,8°K et parfois à 4,2°K, il apparaît une autre raie dans la "queue" de la raie principale.

Sur la figure 21, on a reporté les positions des raies observées suivant l'orientation. On a relié entre elles par des courbes, celles dont la parenté est probable ; cependant, cette parenté est parfois difficile à suivre parce que les raies sont peu intenses, ou qu'elles sont masquées par des raies d'électrons très intenses (courbes en pointillé). Comme on peut le constater sur les figures 18, 19 et 20, certaines des raies apparaissent déjà à 4,2°K, d'autres ne sont nettes qu'à 1,8°K. On a relié entre elles par un trait plus gras les positions des raies de trous légers et lourds "classiques" ; ces raies sont bien connues et leur identification ne pose pas de problèmes. Il y a d'autres raies dont l'identification ne pose pas de problème non plus : ce sont les harmoniques 3 et 5 de trous lourds ; leur identité est facile à vérifier par l'anisotropie (avec l'échelle logarithmique de la figure 21, elles se déduisent par des translations de log 3 et log 5). Signalons que ces raies d'harmoniques sont parfois difficiles à expliquer ; en effet, nous avons vu au § II.4 que l'harmonique 3 était interdit dans la direction $[111]$, mais autorisé en particulier dans la direction $[110]$ ; or on constate qu'il est particulièrement intense dans la direction $[111]$, et douteux dans la direction $[110]$ : ceci est peut-être dû à une légère désorientation de $\vec{B}$ dans le plan (110) [5].

Ge (40 Ωcm)
[100]
Absorption (unités arbitraires)
Masse effective m*
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
Trous légers 0,0435
0,057
0,082 (?)
0,095
0,11 (?)
Electrons 0,136
0,165 (?)
0,210
0,243
Trous lourds 0,280
0,308
0,330 (?)
0,365
4,2°K
1,8°K

FIG. 18

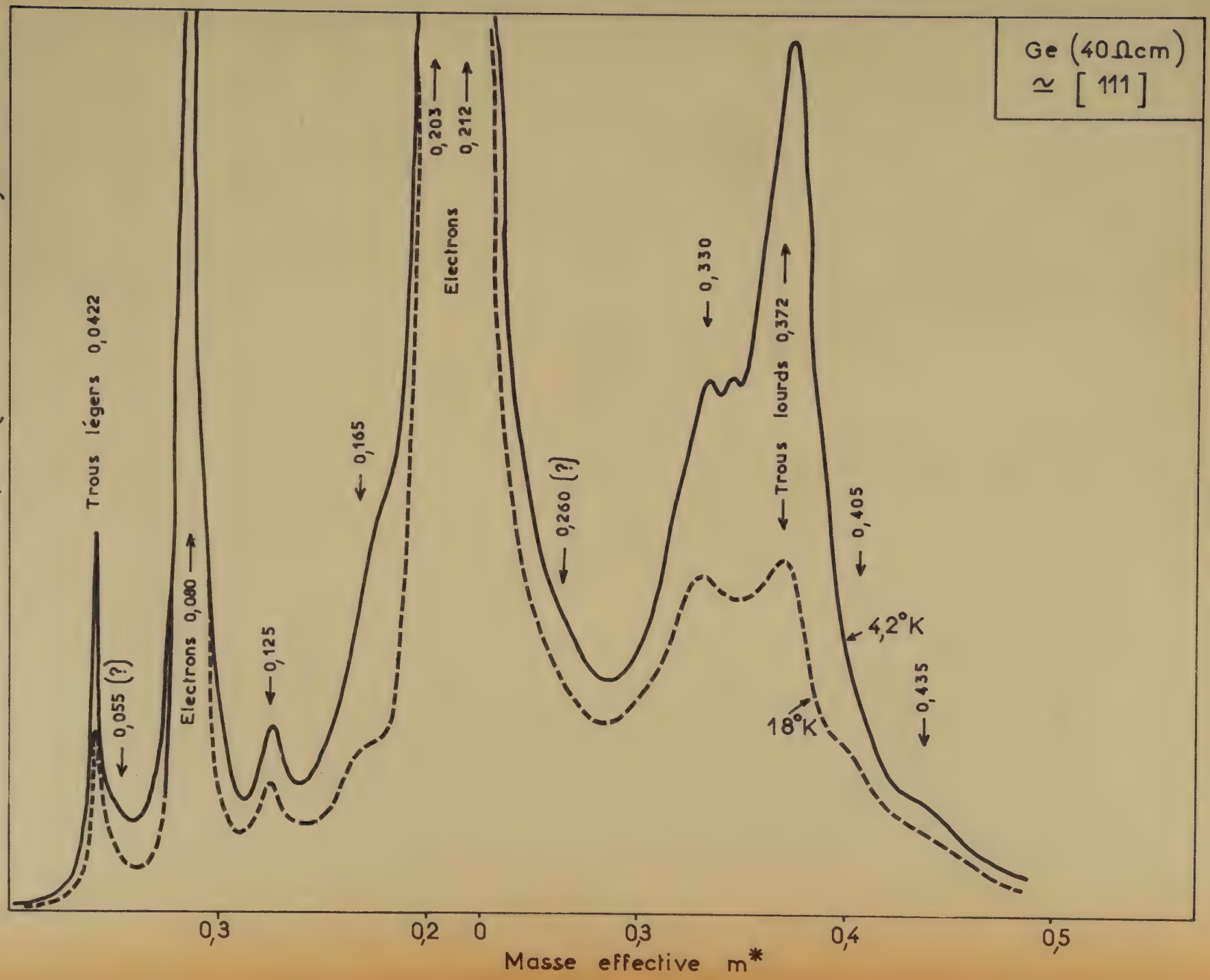

Ge (40 Ωcm)
≃ [ 111 ]
Absorption (unités arbitraires)
Trous légers 0,0422
0,055 (?)
Electrons 0,080
0,125
0,165
Electrons
0,203
0,212
0,260 (?)
0,330
Trous lourds 0,372
0,405
4,2°K
18°K
0,435
0,3
0,2
0
0,3
0,4
0,5
Masse effective m*

FIG. 19

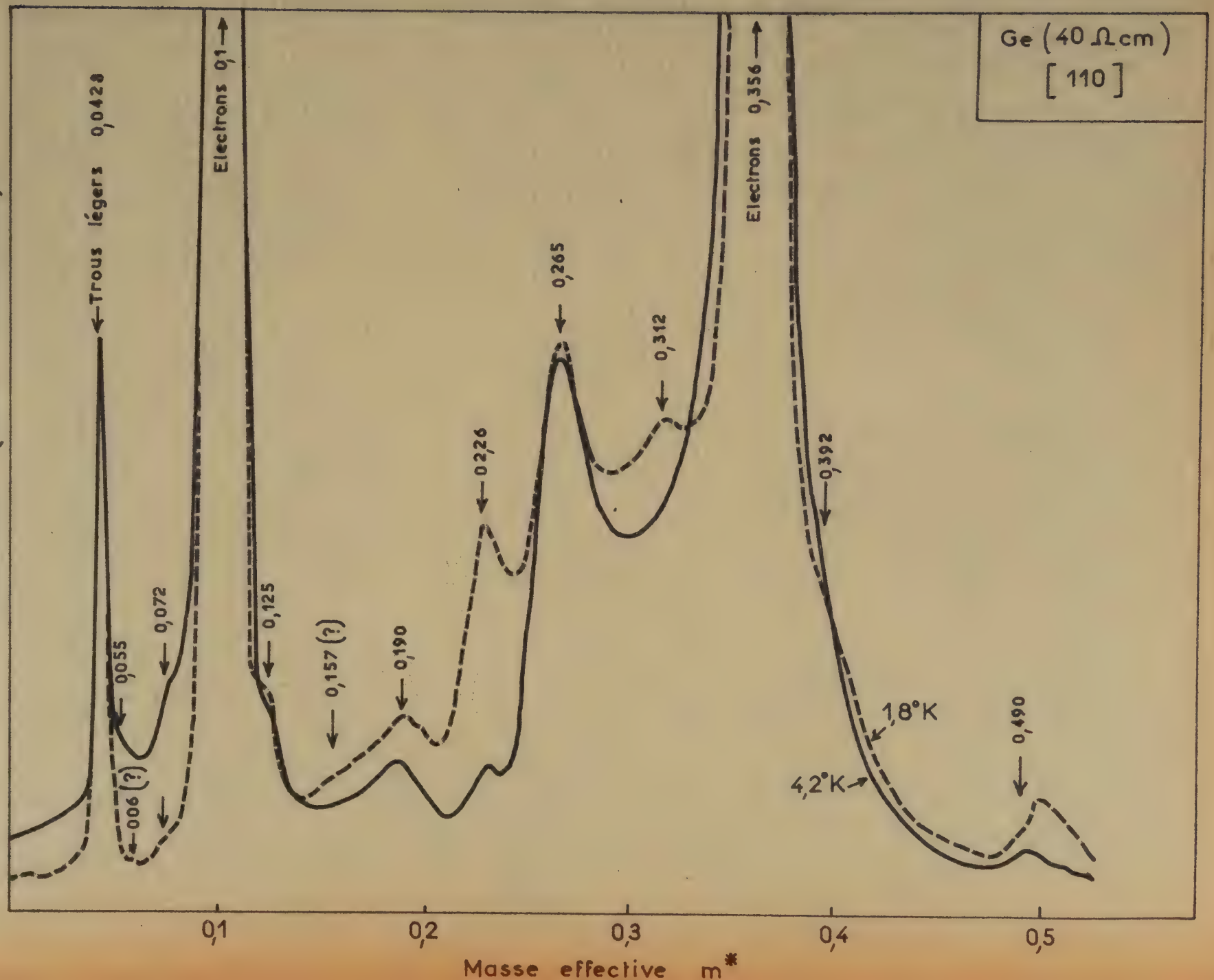

Ge (40 Ωcm)
[110]
Absorption (unités arbitraires)
Trous légers 0,042
Electrons 0,1
Electrons 0,356
0,055
0,072
006 (?)
0,125
0,157 (?)
0,190
0,226
0,265
0,312
0,392
1,8°K
4,2°K
0,490
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
Masse effective m*

FIG. 20

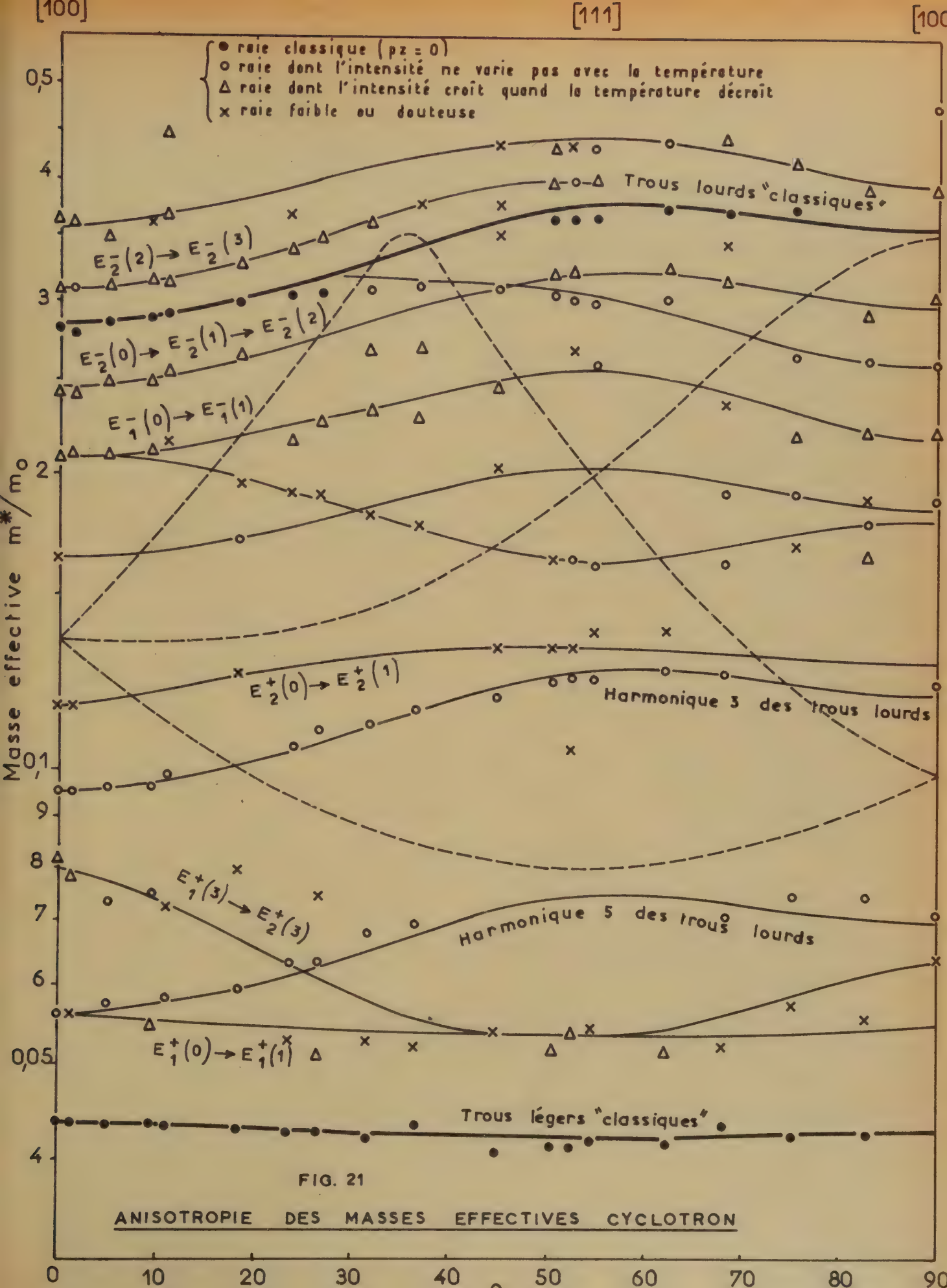



FIG. 21

ANISOTROPIE DES MASSES EFFECTIVES CYCLOTRON

Sur la figure 22, on a porté les surtensions des raies d'électrons et de trous en fonction de la température ; ces surtensions sont déterminées à partir de la largeur à mi-hauteur des raies ($Q = 2B/\Delta B$) ; on remarquera que les surtensions sont différentes pour les deux raies d'électrons ; ceci tient vraisemblablement à une légère désorientation de $\vec{B}$ par rapport à l'axe [110] : les deux raies d'électrons de masses voisines de $0,1\ m_o$ sont légèrement décalée l'une par rapport à l'autre, et la raie résultante est élargie. A la surtension Q des raies, on peut faire correspondre le temps de relaxation $\tau$ (temps de relaxation des moments ; cf. § I.8). Dans le cas des électrons, cette correspondance ne présente pas d'ambiguité, le temps de relaxation étant donné par $\tau = Q/\omega \simeq 0,5.10^{-11}\ Q$. Dans le cas des trous, par suite de la forme compliquée des surfaces d'énergie constante qui peut élargir les raies, et de l'apparition possible de nouvelles raies, cette correspondance est plus douteuse ; d'après Dagguley, Stradling et Whiting [41], il serait préférable de partir de la courb d'absorption différentielle, et le temps de relaxation serait alors donné par $\tau = 0,55(B/\Delta B')\omega^{-1}$ où $B'$ est la largeur à mi-hauteur de la courbe d'absorp tion différentielle. Quoi qu'il en soit, on peut dire que la valeur de $\tau$, déter- minée pour les trous comme pour les électrons, donne une valeur approchée rai- sonnable, mais un peu pessimiste. On voit alors sur la figure 22 que les élec- trons et les trous ont sensiblement les mêmes temps de relaxation (voisins de $2.10^{-10}$ s), ce qui semble montrer que, avec les puretés d'échantillons utilisée et dans le domaine de température étudié, le mécanisme de relaxation des moment est le même pour les deux types de porteurs ; ce mécanisme pourrait être une diffusion par les impuretés neutres [41] (*).

(*) Un élargissement inhomogène pourrait aussi donner le même élargissement des raies d'électrons et de trous. Les trajectoires des porteurs seraient déformées au voisinage des impuretés, ce qui provoquerait un déplacement aléatoire de la fréquence de résonance. Ce mécanisme deviendrait important quand la distance moyenne entre impuretés est supérieure au rayon de l'orbite cyclotron, ce qui correspond à moins de $10^{14}$ impuretés/cm$^3$ dans notre cas .

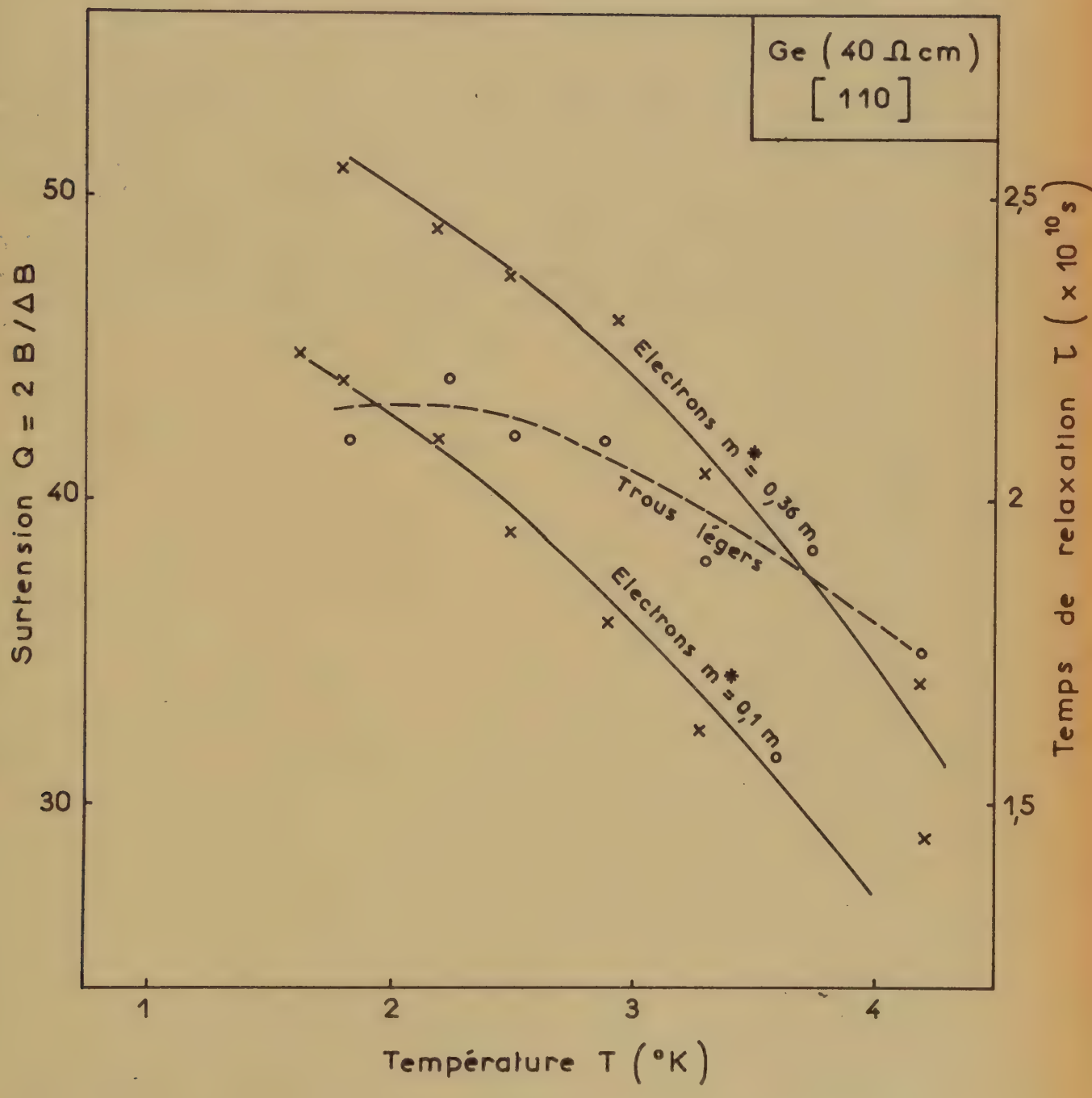



FIG. 22

VARIATION DU TEMPS DE RELAXATION AVEC LA TEMPERATURE

Pour terminer, indiquons que nous avons rapidement essayé, mais sans succès, d'étudier l'effet Stark sur les premiers niveaux de la bande de valence, qui a été proposé pour identifier ces niveaux [28]. Pour appliquer le champ électrique continu à l'échantillon, nous avons été amené à faire des soudures sur l'échantillon, ce qui a conduit à un affaiblissement très net des nouvelles raies d'absorption ; ceci peut être dû à une diffusion de l'indium utilisé pour les soudures, ou plus vraisemblablement à l'introduction de contraintes ; en effet, dans le germanium sous contrainte, la dégénérescence de la bande de valence en $p = 0$ est levée, ce qui amène la disparition des effets quantiques [29]. Enfin, le champ électrique continu appliqué aux porteurs peut les dissocier et contribuer également à cette disparition.

## Chapitre V

## ESSAI D'INTERPRETATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

### V - 1. But recherché ; Essais antérieurs

Nous nous proposons dans ce chapitre d'essayer d'interpréter les positions des raies observées expérimentalement. Nous laissons donc de côté tout ce qui concerne les questions de forme de raies, de mécanismes de relaxation. Le problème se ramène donc à la détermination précise des paramètres de la bande de valence du germanium, au calcul de la position des raies qui en résulte et à l'identification de ces raies avec des raies expérimentales.

La marche à suivre est la suivante : à partir des raies "classiques" à $p_B = 0$ , on détermine les coefficients A, B, C (ou $\gamma_1$ , $\gamma_2$ , $\gamma_3$) de la bande de valence. Cette détermination peut alors être contrôlée par l'identification de raies "classiques" dues à des extrema secondaires en $p_B \neq 0$ . Ensuite, un calcul quantique à partir de ces données donne les valeurs des niveaux d'énergie ; les transitions correspondantes peuvent être confrontées avec les raies observées, l'identification pouvant être guidée par le fait que certaines raies apparaissent mieux à $2^oK$ qu'à $4^oK$, et correspondent donc à des transitions situées plus bas en énergie ; de plus, l'anisotropie des raies nouvelles peut être un guide précieux.

Il y a de nombreuses déterminations des coefficients de la bande de valence à partir des raies classiques [4][5][35][41] ; nous les avons réunies dans le Tableau II. On peut voir qu'il y a une dispersion assez importante. Il est intéressant de signaler que Bagguley et Stradling [43] ont été amenés à modifier les valeurs déterminées à partir des raies classiques à $p_z = 0$ pour interpréter une raie observée dans la direction [110] par un extremum de masse effective à $p_B \neq 0$ (cf. § II.5).

L'interprétation des effets quantiques a conduit également à la détermination des coefficients de la bande de valence du germanium. La première de ces

déterminations est celle de Roth, Lax et Zwerdling [26] ; elle est fondée sur les résultats d'absorption magnéto-optique ; ces auteurs sont partis des coefficients déterminés par Dexter, Zeiger et Lax, puis les ont augmentés de 1,11°/o pour obtenir un accord satisfaisant avec l'expérience ; cette manière de procéder ainsi que l'accord obtenu ne nous permettent pas d'avoir une confiance particulière dans ces coefficients. La seconde détermination est celle de Goodman [27] qui, partant des résultats expérimentaux de Fletcher, Yager et Merritt, a essayé de choisir des coefficients de manière à retrouver les raies observées ; le résultat est assez décevant : aucun des choix de coefficients ne fournit toutes les raies observées, et tous donnent beaucoup de raies supplémentaires non observées ; le "meilleur" choix fait par Goodman conduit d'ailleurs à un coefficient C trop grand si on le compare à la moyenne des valeurs déduites des résultats classiques ; ce désaccord provient peut-être de l'exclusion a priori des transitions à $p_B \neq 0$ , et qui conduit à une identification incorrecte des raies.

V - 2. Détermination des coefficients de la bande de valence du germanium à partir des raies "classiques"

Nous avons repris la détermination des coefficients de la bande de valence à partir de nos résultats expérimentaux, à l'aide de la formule (III,2,14) que nous répétons ici :

$$\frac{m_o}{m_c^*} = \gamma_1 \pm (\gamma_2^2 + 3\,\gamma_3^2)^{1/2} \pm \frac{3}{4}\,\frac{\gamma_2^2 - \gamma_3^2}{(\gamma_2^2 + 3\,\gamma_3^2)^{1/2}}\,(K+1) + \ldots$$

En utilisant des valeurs approchées de $\gamma_1$ , $\gamma_2$ , $\gamma_3$ , il est facile de s'assurer que le terme en $(K+1)^2$ n'apporte qu'une correction inférieure à 1°/o à la formule limitée au premier ordre. D'autre part, le déplacement du sommet de la raie des trous lourds par rapport à la position calculée par la formule précédente, dû à la dispersion des masses en fonction de $p_B$ , est faible dans notre cas (dans les trois directions principales, le déplacement relatif de la raie des trous lourds est de $\pm 0{,}22/\omega\tau$ [19], ce qui, pour $\omega\tau \simeq 40$ , donne 0,5°/o environ).

a) Coefficient $\gamma_1$ : C'est lui qui est le mieux connu, et d'ailleurs celui sur lequel l'accord entre les différents expérimentateurs est le meilleur. On l'obtient en faisant la somme des inverses des masses effectives des trous

légers et des trous lourds. Une moyenne sur toutes les directions donne alors :

$$\gamma_1 = 13,21 \pm 0,05 \quad .$$

Remarquons que, pour la détermination de ce coefficient, il est assez illusoire d'introduire les corrections mentionnées plus haut, celles-ci étant beaucoup plus petites que l'indétermination expérimentale de l'inverse des masses effectives des trous légers.

b) Coefficients $\gamma_2$ et $\gamma_3$ : L'expression $(\gamma_2^2 + 3\,\gamma_3^2)^{1/2}$ est déterminée de manière assez précise à partir de la masse effective des trous lourds dans la direction [111] (pour laquelle on a $\Theta = 0$). On a :

$$\frac{m_0}{(m^*)_{[111]}} = 2,70 \pm 0,02 \quad ,$$

soit, en appliquant la correction de $0,22/\omega\tau$ :

$$\gamma_1 - (\gamma_2^2 + 3\,\gamma_3^2)^{1/2} = 2,71 \pm 0,02 \quad .$$

En utilisant la valeur de $\gamma_1$ obtenue précédemment, on trouve :

$$(\gamma_2^2 + 3\,\gamma_3^2)^{1/2} = 10,5 \pm 0,07 \quad .$$

Par contre, l'expression $(\gamma_3^2 - \gamma_2^2)$ qui est liée à l'anisotropie des raies est moins bien connue, et en particulier les corrections sont difficiles à évaluer et assez illusoires par suite de la dispersion des valeurs expérimentales. On trouve :

$$\gamma_3^2 - \gamma_2^2 = 11,57 \pm 0,3 \quad ,$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \gamma_2 = 4,37 \pm 0,06 \\ \gamma_3 = 5,51 \pm 0,03 \end{cases} \quad .$$

A l'aide du Tableau I, on peut en déduire les coefficients A, B, C :

$$\begin{cases} A = 13,21 \pm 0,05 \\ B = -8,74 \pm 0,12 \\ |C| = 11,8 \pm 0,3 \end{cases} \quad .$$

c) Coefficient $K$ : Ce coefficient n'intervient que dans l'analyse quantique de la résonance cyclotron. Cependant, on peut l'exprimer à partir des coefficients F, G, $H_1$, $H_2$ introduits par Dresselhaus, Kip et Kittel [4] (cf. Tableau I) ; en admettant, comme le font ces derniers, que $H_2$ est négligeable [illegible],

[illegible] 0,1 .

On peut contrôler ces coefficients en identifiant des raies dues à des extrema secondaires de $m^*(x)$. Leur calcul est fait dans l'Appendice A,3 : dans la direction $\langle 110 \rangle$, on retrouve un extremum à $m^* = 0{,}265\ m_o$ [42] qui s'identifie à une raie intense ; pour $\langle 111 \rangle$, il y deux extrema, l'un de valeur élevée (non explorée expérimentalement), l'autre au voisinage de $m^* = 0{,}330\ m_o$ qui s'identifie à une raie observée.

V - 5. Identification des raies observées

C'est une opération délicate : après avoir reconnu les raies "classiques" (à $p_B = 0$ et $p_B \neq 0$, et les raies d'harmoniques), il faut identifier les raies quantiques, ce qui est difficile en l'absence de calculs complets des niveaux de Landau.

Nous avons tenté cette identification et les résultats sont résumés sur la figure 21. En dehors des raies à $p_B = 0$ et des raies d'harmoniques, il y a une raie classique à $p_B \neq 0$ facile à identifier : c'est celle qui correspond à $m^* = 0{,}265\ m_o$ pour $\langle 110 \rangle$ et à $0{,}330\ m_o$ pour $\langle 111 \rangle$ ; cette raie rejoint la raie principale à $p_B = 0$ vers $\theta = 29{,}5^\circ$ (voir Appendice A,4) ; les autres extrema secondaires sont plus difficiles à observer, soit qu'ils soient de valeurs élevées, soit qu'ils se produisent très près de la raie principale à $p_B = 0$ et dans des intervalles très petits (trous légers au voisinage de $\theta = 30^\circ$), soit qu'ils soient très sensibles à l'orientation (trous lourds au voisinage de $\langle 100 \rangle$ ; la raie voisine de $m^* = 0{,}6\ m_o$ observée par Fletcher, Yager et Merritt [36] pourrait être de ce type).

Deux raies quantiques peuvent être prévues avec de fortes chances de succès ; ce sont les deux premières transitions des niveaux de trous légers ($E_1^+(0) \longrightarrow E_1^+(1)$ et $E_2^+(0) \longrightarrow E_2^+(1)$ dans la notation de Luttinger) dans la théorie de Luttinger, les inverses des masses correspondantes s'expriment simplement comme $\gamma_1 - \gamma'$ et $\gamma_1 + \gamma'$ (voir (III,2,12)) ; nous savons que

ces expressions ne sont pas exactes (voir § III.2), mais elles donnent un ordre de grandeur correct et sont exactes dans la direction 111 , ce qui permet d'identifier les deux raies (voir Fig.21) ; ces raies sont assez faibles, comme le laissent prévoir les différences des masses effectives de courbure des niveaux de Landau correspondants (voir Fig.8). Les autres raies sont plus difficiles à identifier ; nous avons cependant indiqué Fig.21 quelques transitions ($E_1^-(0) \longrightarrow E_1^-(1)$ ; $E_2^-(0) \longrightarrow E_2^-(1) \longrightarrow E_2^-(2)$ ; $E_2^-(2) \longrightarrow E_2^-(3)$) qui donnent des masses du bon ordre de grandeur dans la direction 100 d'après les calculs d'Evtuhov [30]. Signalons enfin qu'il y a des raies dont l'anisotropie est dirigée dans le même sens que pour les trous légers, et on est tenté de les attribuer à des niveaux de trous légers ; cependant, leur position interdit de les attribuer à des transitions entre niveaux d'une même série ; mais, d'après les calculs d'Evtuhov, les transitions entre niveaux $E_1^+(n)$ et $E_2^+(n)$ deviennent assez probables très près de $d = 0$ , et si les masses effectives de courbures sont voisines, on peut avoir des raies observables ; ainsi, une de ces raies pourrait être attribuée à la transition $E_1^+(3) \longrightarrow E_2^+(3)$ .

Pour terminer, précisons que, en l'absence de calcul précis des niveaux de Landau, ces identifications ne sont que probables.

## CONCLUSION

Après avoir étudié la résonance cyclotron dans la bande de valence du germanium du point de vue théorique, nous avons décrit un spectrographe travaillant à 8 mm de longueur d'onde et permettant de travailler à basse température (4,2 et 1,8°K) sans échauffer les porteurs par le champ électrique qui leur est appliqué.

Les résultats obtenus nous ont permis de déterminer de manière précise les paramètres de la bande de valence du germanium : $A = 13,21 \pm 0,05$ ; $B = -8,74 \pm 0,12$ ; $C = 11,8 \pm 0,3$ dans la notation de Dresselhaus, Kip et Kittel ; $\gamma_1 = 13,21 \pm 0,05$ ; $\gamma_2 = 4,37 \pm 0,06$ ; $\gamma_3 = 5,51 \pm 0,03$ ; $K = 3,33 \pm 0,1$ dans la notation de Luttinger. A partir de ces valeurs, nous avons étudié les masses effectives cyclotron classiques par la méthode des tubes de Shockley : nous avons montré qu'il apparaît des raies observables dues à des extrema secondaires de $m_c^*$ en fonction de $x = 2\, m_o E/p_B^2$ (en particulier, dans les directions [110] et [111]).

Nous avons ensuite essayé d'interpréter certaines des raies nouvelles que nous avons observées par des transitions entre les premiers niveaux de Landau non équidistants de la bande de valence. Malheureusement, en l'absence de calculs numériques des niveaux de Landau, cette interprétation n'est que probable.

Il serait donc intéressant de faire un calcul complet des extrema secondaires classiques et des niveaux de Landau ainsi que des fonctions propres correspondantes suivant l'orientation.

Pour terminer, indiquons qu'il ne nous semble pas qu'il y ait parmi les niveaux de Landau de la bande de valence du germanium de niveaux favorables à un effet Maser proposé par Lax [44] ; nous pensons que dans le silicium dont la bande de valence est analogue à celle du germanium, mais avec une anisotropie plus forte et une bande $V_3$ plus proche des bandes ($V_1$ , $V_2$), il y a des niveaux plus propices à cette application.

## Appendice A

### Calcul classique de $m_c^*$ en fonction de $x = 2\, m_o E/p_B^2$

A - 1. Discussion de la nature des sections

La masse effective $m_c^*(x)$ est fonction de la surface $\Sigma$ d'une section par un plan $x = C^{te}$ des surfaces d'équation réduite (II,3,3) :

$$m_c^*(x)/m_o = \frac{1}{\pi}\ (d\Sigma/dx) \qquad (A,1,1)$$

où

$$\Sigma = \frac{1}{2} \oint y^2\, d\varphi \quad , \qquad (A,1,2)$$

y est racine de l'équation (II,3,3).

Nous allons indiquer ici les résultats de la discussion de la nature des sections suivant l'orientation.

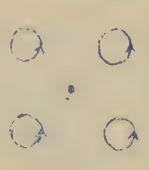
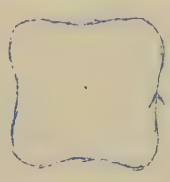
a) Direction [100] : Il faut faire $\theta = 0$ , et on est ramené à discuter les racines de l'équation

$$x = A(1 + y^2) \pm \left\{ B^2(1 + y^2)^2 + C^2\left[ y^2 + y^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \right] \right\}^{1/2} \qquad (A,1,3)$$

où encore

$$F(y,\varphi,x) = y^4(A^2 - B^2 - C^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi\ ) + y^2(2A^2 - 2B^2 - 2Ax - C^2) + A^2 - B^2 + x^2 - 2Ax = 0 \quad . \qquad (A,1,4)$$

Il suffit de discuter les racines dans les directions $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Le résultat est le suivant (les sections de la bande $V_2$ correspondant au signe - sont en pointillé) :

| x | 0 | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nature des sections | Pas de section |  | |  | | |
| $m_C^{*}(x)$ | | 1 masse $> 0$ quadruplement dégénérée (La dégénérescence est levée si on s'écarte de [100] ) | 1 masse $> 0$<br>1 masse $< 0$ (surface réentrante) | 1 masse $> 0$ | 1 masse $> 0$ (lourde)<br>1 masse $> 0$ (légère) | |

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{C}{4B^2+C^2}\left\{\left[12B^2(A^2-B^2) + C^2(4A^2-7B^2-C^2)\right]^{1/2} - AC\right\} \\ x_1 = \dfrac{C}{2B^2}\left\{\left[(A^2-B^2)(C^2+4B^2)\right]^{1/2} - AC\right\} \\ x_2 = A - |B| \\ x_3 = A + |B| \end{cases} \qquad (A,1,5)$$

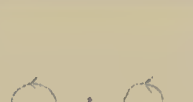
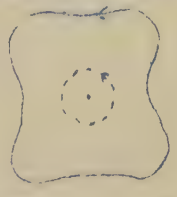
b) Direction [110] : Il faut faire $\theta = \frac{\pi}{2}$ , et on est ramené à discuter les racines de l'équation

$$x = A(1+y^2) \pm \left\{B^2(1+y^2)^2 + \frac{C^2}{4}\left[y^4(1+3\cos^2\varphi)\sin^2\varphi + 2y^2(3\cos^2\varphi - 1) + 1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (A,1,6)$$

où encore

$$F(y,\varphi,x) = y^4\left[A^2-B^2-\frac{C^2}{4}(1+3\cos^2\varphi)\sin^2\varphi\right] + 2y^2\left[A^2-B^2-Ax+\frac{C^2}{4}(3\cos^2\varphi-1)\right] + A^2-B^2+x^2-2Ax-\frac{C^2}{4} = 0 \quad . \qquad (A,1,7)$$

Il suffit de discuter les racines pour $\varphi = 0$. Le résultat est le suivant (les sections de la bande $V_2$ des trous légers sont en pointillé) :

| x | 0 | $x'_0$ | $x'_1$ | $x'_2$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Nature des sections | Pas de sections |  | |  | |
| $m_c^{*}(x)$ | | 1 masse $> 0$ doublement dégénérée (La dégénérescence est levée si on s'écarte de $[110]$) | 1 masse $> 0$ simple | 1 masse $> 0$ (lourde)<br>1 masse $> 0$ (légère) | |

$$\begin{cases} x'_0 = \dfrac{C}{2B^2}\left\{\left[(A^2 - B^2)(C^2 + 3B^2)\right]^{1/2} - AC\right\} \\ x'_1 = A - \sqrt{B^2 + \dfrac{C^2}{4}} \\ x'_2 = A + \sqrt{B^2 + \dfrac{C^2}{4}} \end{cases} \qquad (A,1,8)$$

Remarque : La condition pour avoir une surface réentrante dans la direction $[110]$ s'écrit $x'_0 \leqslant x'_1$ ; on peut la mettre sous la forme plus simple :

$$A \leqslant \frac{2B^2 + C^2}{\sqrt{4B^2 + C^2}} \quad . \qquad (A,1,9)$$

En fait, les erreurs expérimentales sur les coefficients ne permettent pas de décider si on a une surface réentrante dans la direction $[110]$.

De même, la condition pour avoir une surface réentrante dans la direction $[100]$ s'écrit $x_0 \leqslant x_1$ ; on peut la mettre sous la forme plus simple :

$$B^2 - AB + \frac{C^2}{2} \geqslant 0 \quad . \qquad (A,1,10)$$

Avec les valeurs numériques des coefficients, cette condition est largement réalisée.

c) Direction [111] : Il faut faire $\cos^2\theta = \frac{1}{3}$ . Il suffit alors de comparer 0 aux racines de l'équation

$$x = A(1+y^2) \pm \left[ B^2(1+y^2)^2 + C^2\left(\frac{y^4}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} y^3 \cos 3\left(\varphi + \frac{1}{3}\right)\right)\right]^{1/2} \qquad (A,1,11)$$

ou encore

$$F(y,\varphi, x) = y^4\left[A^2-B^2-\frac{C^2}{4}\right] + y^3\ \frac{\sqrt{2}}{3}\ C^2 \cos 3\varphi + 2y^2\left[A^2-B^2-Ax\right]$$

$$+ A^2-B^2-\frac{C^2}{3} - 2Ax + x^2 = 0 \ . \qquad (A,1,12)$$

Le résultat est [illegible] (la bande $V_2$ en pointillé) :

| x | 0 | $x''_0$ | $x''_1$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Nature des sections | Pas de section | | | |
| $m_c^{\perp}(x)$ | | 1 masse > 0 | 1 masse > 0 (lourde)<br>1 masse > 0 (légère) | |

$$\begin{cases} x''_0 = A - \sqrt{B^2 + \frac{C^2}{3}} \\ x''_1 = A + \sqrt{B^2 + \frac{C^2}{3}} \end{cases} \qquad (A,1,13)$$

A - 2. Masses effectives et densité d'état aux valeurs limites de x

A certaines valeurs limites de x où les racines des équations précédentes tendent vers zéro ($x_2$ et $x_3$ , $x'_1$ et $x'_2$ , $x''_0$ et $x''_1$), on peut calculer directement les masses effectives et les densités d'état en dérivant sous le signe $\int$ (pour ces valeurs limites, les bornes d'intégration ne varient pas).

a) Direction [100] : Posons $Y(\varphi, x) = y^2(\varphi, x)$ , $Y' = \frac{dy^2}{dx}$ , $Y'' = \frac{d^2y^2}{dx^2}$ . On a alors :

$$\begin{cases} N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} Y' \, d\varphi \\ \frac{dN}{dx} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} Y'' \, d\varphi \end{cases} \qquad (A,2,1)$$

où Y' et Y" sont donnés par :

$$Y' = \frac{A(1+Y) - x}{(A^2-B^2)(1+Y) - Ax - \frac{C^2}{2}(1+2Y\sin^2\varphi\cos^2\varphi)}$$

$$Y'' = Y'\left[\frac{AY'-1}{A(1+Y)-x} - \frac{(A^2-B^2)Y' - A - C^2Y'\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(A^2-B^2)(1+Y) - Ax - \frac{C^2}{2}(1+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)}\right] \qquad (A,2,2)$$

Pour $x = A \pm B$, on trouve :

$$\begin{cases} (m^{\#})_{lim} = \dfrac{\pm B}{B^2 \pm AB + \frac{C^2}{2}} \\ \left(\dfrac{dm^{\#}}{dx}\right)_{lim} = \dfrac{C^2(7B^2+2C^2)}{8\left(B^2 \pm AB + \frac{C^2}{2}\right)^3} \end{cases} \qquad (A,2,3)$$

b) Direction [110] : Avec les mêmes notations que plus haut, on a :

$$\begin{cases} m^{\#}(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} Y'\,d\varphi \\ \dfrac{dm^{\#}}{dx} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} Y''\,d\varphi \end{cases} \qquad (A,2,4)$$

où Y' et Y" sont donnés par :

$$Y' = \frac{A(1+Y) - x}{(A^2-B^2-\frac{C^2}{4})(1+Y) - Ax + \frac{C^2}{4}(3\cos^2\varphi - 2)(Y\cos^2\varphi - 1)}$$

$$Y'' = Y'\left[\frac{AY'-1}{A(1+Y)-x} - \frac{(A^2-B^2-\frac{C^2}{4})Y' - A - \frac{C^2}{4}\cos^2\varphi\,(3\sin^2\varphi - 1)}{(A^2-B^2-\frac{C^2}{4})(1+Y) - Ax + \frac{C^2}{4}(3\cos^2\varphi - 2)(Y\cos^2\varphi - 1)}\right] \qquad (A,2,5)$$

Pour $x = x'_1 = A - \sqrt{B^2 + \frac{C^2}{4}}$, l'intégrale $\int Y'd\varphi$ diverge comme on s'y attend (point col).

Pour $x = x'_2 = A + \sqrt{B^2 + \frac{C^2}{4}}$, on trouve :

$$(m^{*})_{lim} = \frac{\left(B^2 + \frac{C^2}{4}\right)^{1/2}}{\left(B^2 + \frac{C^2}{2} + A\sqrt{B^2 + \frac{C^2}{4}}\right)^{1/2}\left(B^2 - \frac{C^2}{4} + A\sqrt{B^2 + \frac{C^2}{4}}\right)^{1/2}} \qquad (A,2,6)$$

et pour $\left(\frac{dm^{*}}{dx}\right)_{lim}$, une expression encore plus compliquée.

c) Direction [111] : Toujours avec les mêmes notations, on a :

$$\begin{cases} m^{*}(x) = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3} Y'\, d\varphi \\ \frac{dm^{*}}{dx} = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3} Y''\, d\varphi \end{cases} \qquad (A,2,7)$$

où

$$Y' = \frac{A(1+Y) - x}{\left(A^2 - B^2 - \frac{C^2}{4}\right)(1+Y) - \frac{C^2}{4}\left(\sqrt{2\,Y}\cos 3\varphi - 1\right) - Ax} \qquad (A,2,8)$$

$$Y'' = Y'\left[\frac{AY'-1}{A(1+Y)-x} - \frac{\left(A^2 - B^2 - \frac{C^2}{4}\right)Y' - \frac{C^2\,Y'}{4\sqrt{2\,Y}}\cos 3\varphi - A}{\left(A^2 - B^2 - \frac{C^2}{4}\right)(1+Y) - \frac{C^2}{4}\left(\sqrt{2\,Y}\cos 3\varphi - 1\right) - Ax}\right]$$

Pour $x = A \pm \sqrt{B^2 + \frac{C^2}{3}}$, on trouve

$$\begin{cases} (m^{*})_{lim} = \dfrac{\pm\sqrt{B^2 + \frac{C^2}{3}}}{B^2 \pm A\sqrt{B^2 + \frac{C^2}{3}}} \\ \left(\frac{dm^{*}}{dx}\right)_{lim} = \dfrac{-C^2\left(7B^2 + C^2\right)}{12\left[B^2 \pm A\sqrt{B^2 + \frac{C^2}{3}}\right]^3} \end{cases} \qquad (A,2,9)$$

A - 3. Calcul général pour les trois directions principales

On peut donner [11] une expression analytique de $m^{*}(x)$ en faisant intervenir des intégrales elliptiques tabulées pour les directions [100] et [110]. Nous avons préféré faire une résolution numérique qui est appliquable dans tous les cas.

Ce calcul a été fait au centre de calcul numérique des Laboratoires PHILIPS à Eindhoven que nous remercions ici. La variation de $m^{*}(x)$ en fonction de x est représentée Fig. 23, 24, 25. On retrouve sur les figures les valeurs limites calculées directement. Pour la direction [100], on retrouve l'allure du résultat de Kagan [11], seules les valeurs numériques étant changées. Pour la direction [110], on retrouve l'extremum $m^{*} = 0{,}265\ m_o$ calculé par Bagguley et Stradling [43] pour des paramètres voisins (cf. Tableau II). Pour la direction [111], $m^{*}(x)$ présente deux extrema pour les trous lourds.

Il faut remarquer que, pour les trous légers, la masse effective limite (quand le plan $x = cte$ est tangent à la surface d'énergie constante) est inférieur à $m_+^{*}(\infty)$ (correspondant à $p_B = 0$) pour la direction [100], et supérieur à $m_+^{*}(\infty)$ pour [111] et [110]. Il semble donc qu'il existe une orientation entre [100] et [111] où ces deux masses sont égales. Il est donc intéressant de faire le calcul de $(m^{*})_{lim}$ en fonction de l'orientation, c'est-à-dire la masse effective le long d'un contour de section des surfaces d'énergie constante par un plan (110).

A - 4. Masses effectives limites le long d'un contour dans un plan (110)

On trouve facilement que la masse effective en un point du contour est donnée par

$$m^{*} = \frac{p_o \sqrt{R_o R_1}}{\hbar}$$

où $p_o$ est la cote du plan tangent et $R_o$ et $R_1$ les rayons de courbure principaux en ce point. L'un des plans de section principale est d'ailleurs le plan (110), l'autre un plan perpendiculaire. Le calcul de $m^{*}$ peut être fait sous forme paramétrique, et donne :

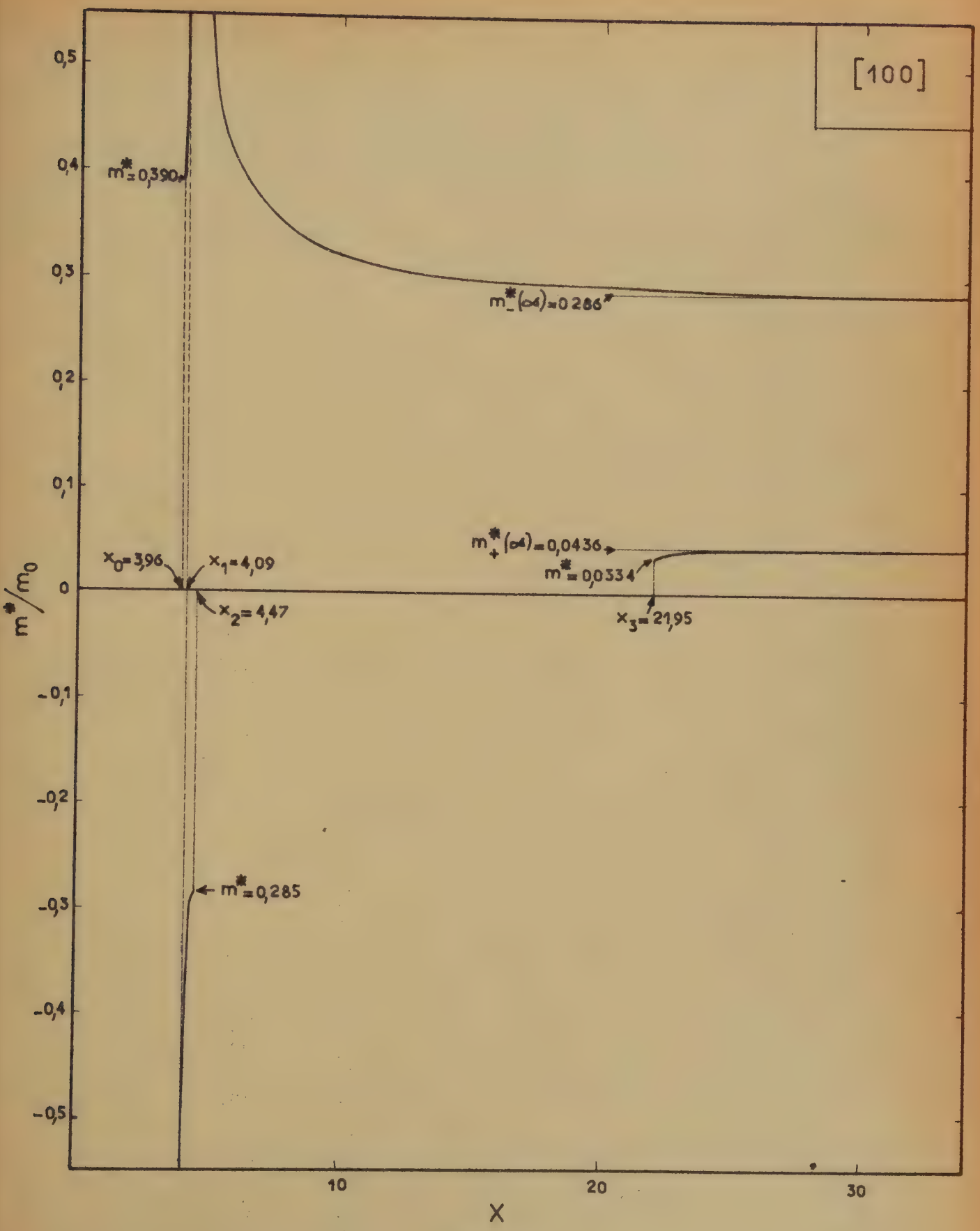

[100]
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
m*/m0
m*=0,390
m*(∞)=0286
m+*(∞)=0,0436
m*=0,0334
x0=3,96
x1=4,09
x2=4,47
x3=21,95
m*=0,285
10
20
30
X

Fig. 23

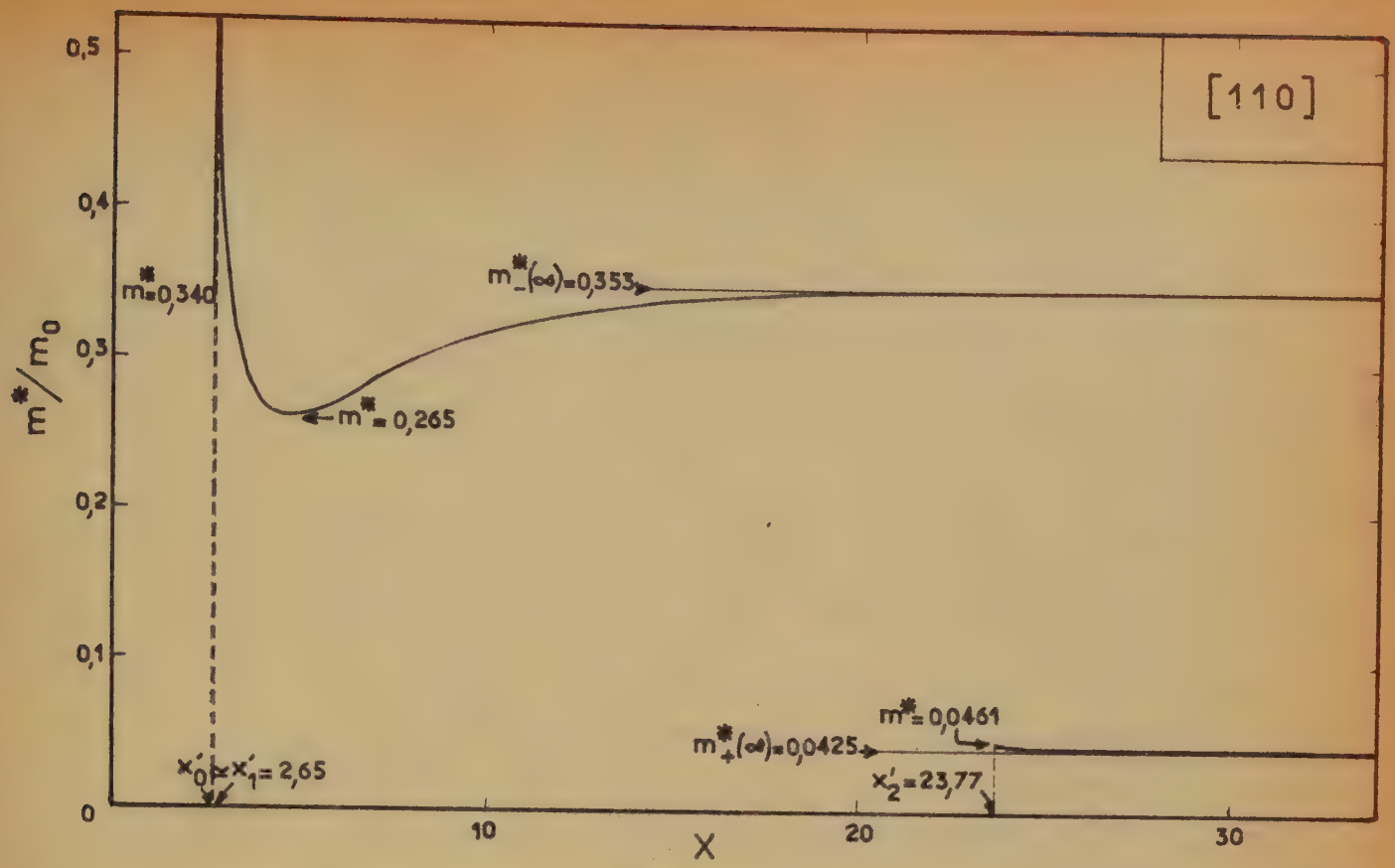

[110]
m*/m0
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
m*=0,340
m*_(∞)=0,353
m*=0,265
m*=0,0461
m*+(∞)=0,0425
x'0=x'1=2,65
x'2=23,77
10
20
30
X

Fig. 24

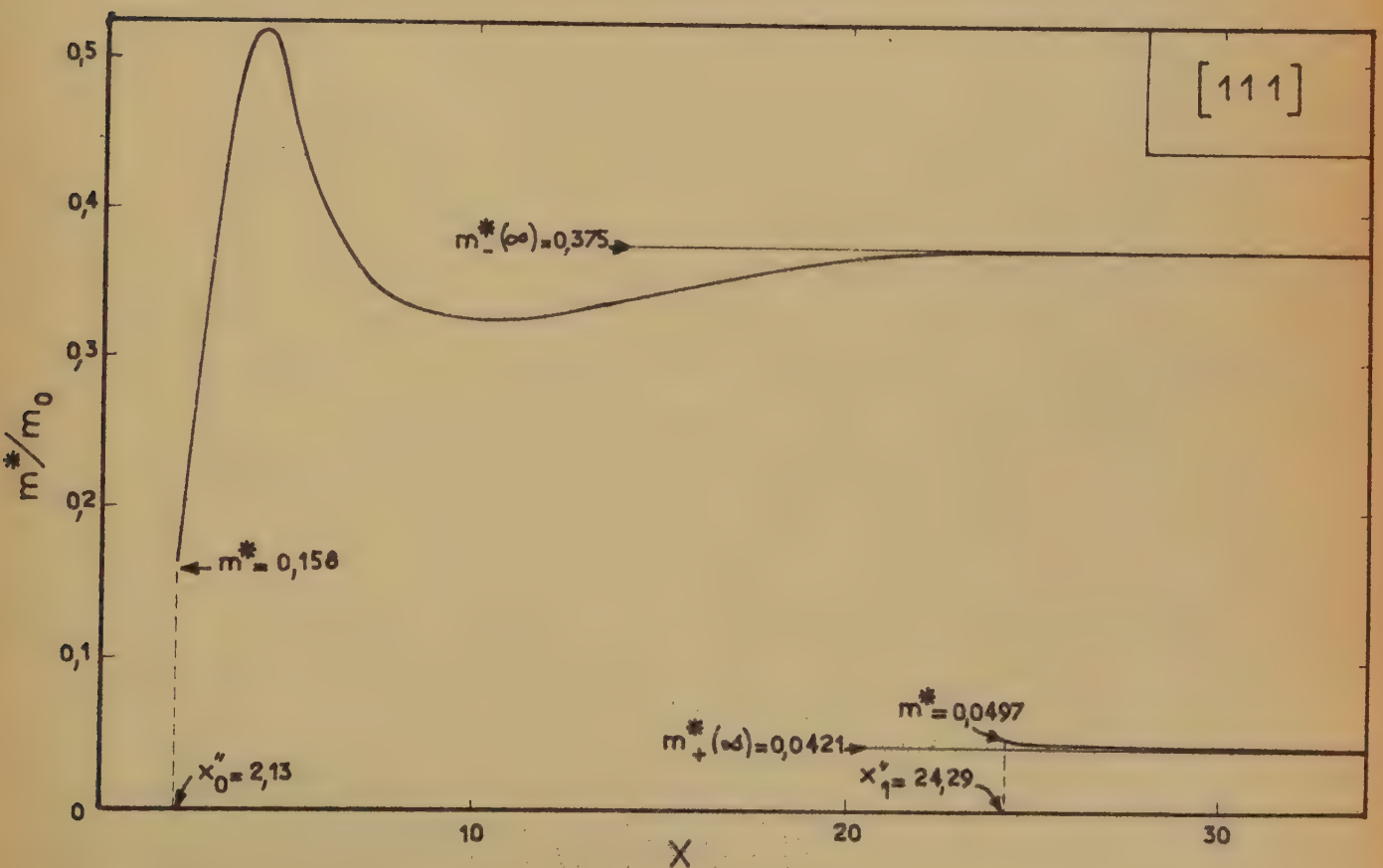

[111]
m*/m0
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
m*_(∞)=0,375
m*=0,158
m*=0,0497
m*+(∞)=0,0421
x''0=2,13
x''1=24,29
10
20
30
X

Fig. 25

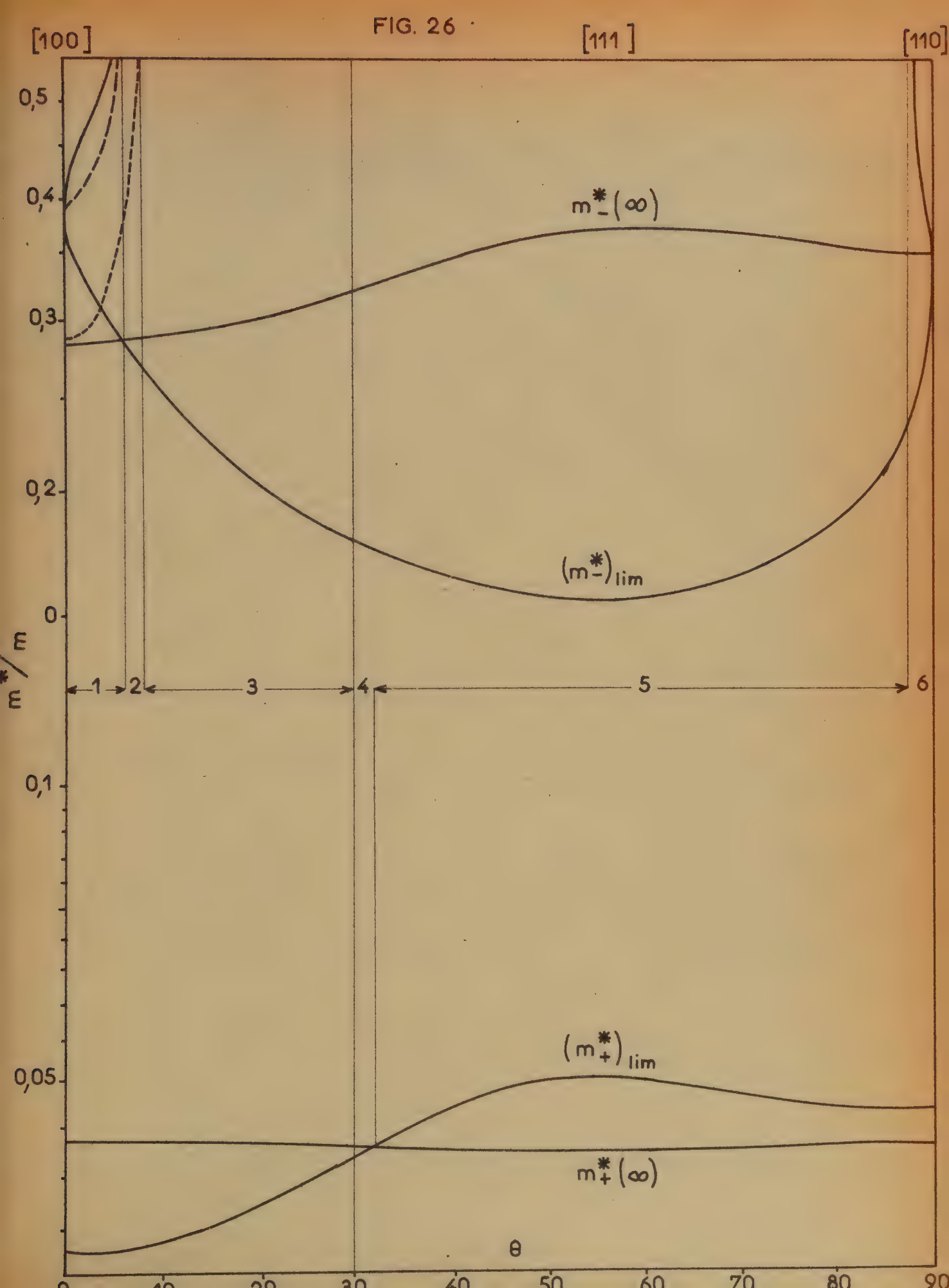
$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{2\,U\,\operatorname{tg}\varphi + U'}{2\,U - U'\,\operatorname{tg}\varphi} \\ \left|\dfrac{m^*_{lim}}{m_o}\right| = \left\{\left[\dfrac{4\,U^2 + U'^2}{U(4\,U^2 - U'^2 + 2\,U\,U'')}\right]\left[\dfrac{1}{\dfrac{g_2}{2\,U - 2\,A} + A}\right]\right\}^{1/2} \end{cases}$$

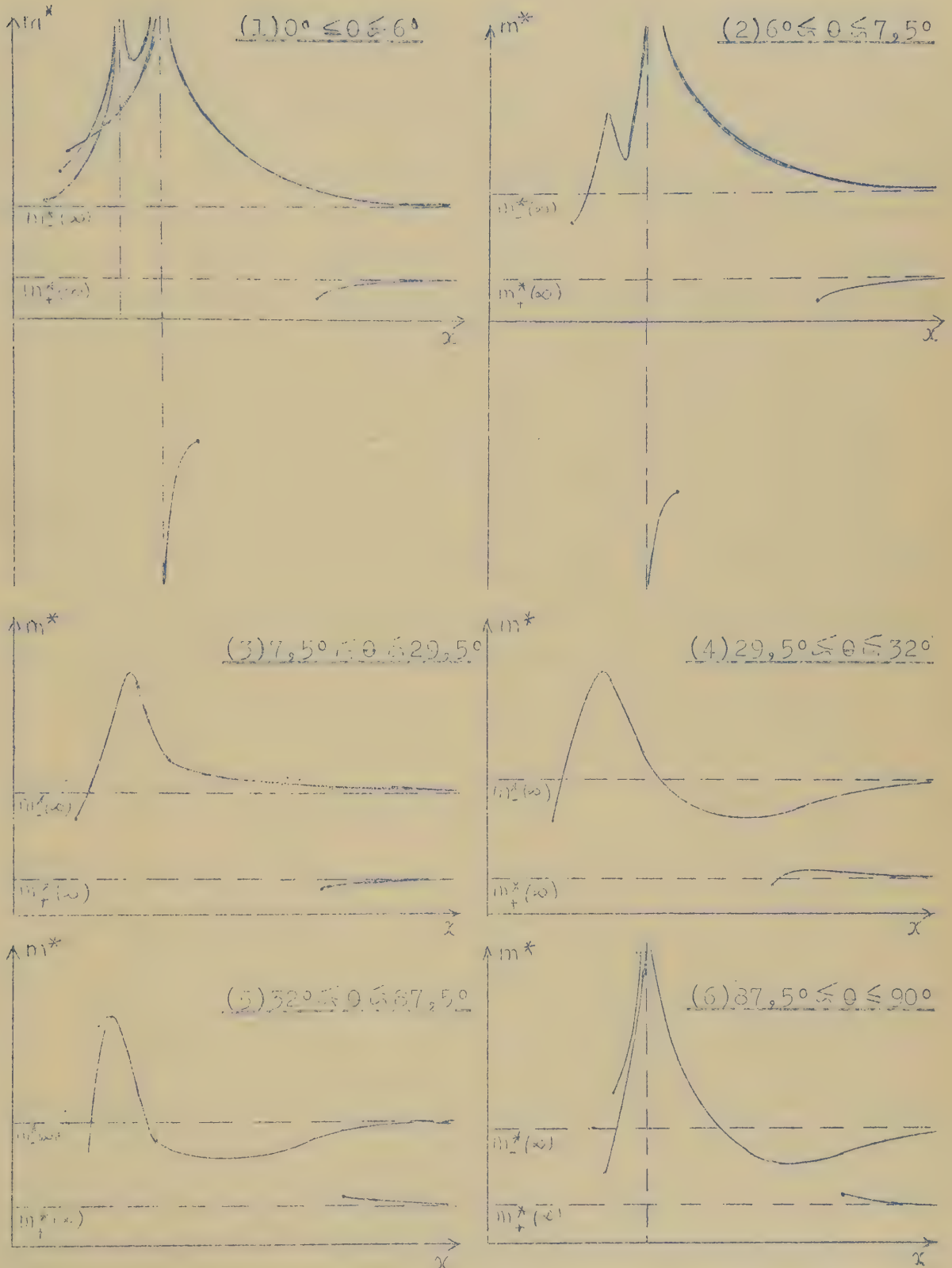
(A,4,1)

$\theta$ est l'angle de $\vec{B}$ avec l'axe $[100]$, $\varphi$ le paramètre ; on a posé : $U = A \pm \sqrt{g_o}$ , $U' = \dfrac{dU}{d\varphi}$ , $U'' = \dfrac{d^2U}{d\varphi^2}$ . Remarquons que, si les deux crochets qui interviennent dans l'expression de $(m^*)_{lim}$ sont positifs, la masse correspondante est positive, s'ils sont négatifs, la masse est négative (s'ils sont de signes opposés, il n'y a pas de masse limite). Pour les orientations $[100]$, $[111]$ et $[110]$, on retouve les résultats du paragraphe précédent.

Sur la figure 26, on a tracé la variation de $(m^*)_{lim}$ en fonction de $\theta$ ; les masses négatives sont représentées dans cette échelle par un trait pointillé; en trait gras, on a également porté les masses effectives correspondant à $p_B = 0$ $(x = \infty)$ donné par la formule (II,2,8) ; au voisinage de $[100]$, il y a une autre masse effective limite qui n'est pas située sur le contour (110) : on a représenté la variation de cette masse par un trait discontinu. On constate que, pour les trous légers, $(m^*)_{lim}$ est effectivement égale à $m^*_+(\infty)$ pour $\theta \gtrsim 32^\circ$. Ces résultats complètent ceux de Zeiger, Lax et Dexter [19] (voir § II.4) qui donnent la variation de $m^*$ au voisinage de $x = \infty$ ; en particulier, pour $\theta = 29.5^\circ$ , le sens de variation de $m^*(x)$ au voisinage de $x = \infty$ change de signe. On peut alors partager le domaine de variation de $\theta$ en six régions (Fig.26) ; dans chacune de ces régions, on peut prévoir l'allure de la variation de $m^*(x)$. Ces allures sont les suivantes :

FIG. 26


[100]
[111]
[110]
0,5
0,4
0,3
0,2
0
0,1
0,05
$m_-^*(\infty)$
$(m_-^*)_{lim}$
$(m_+^*)_{lim}$
$m_+^*(\infty)$
$m^*/E$
1
2
3
4
5
6
θ
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90


(1) 0° ≤ θ ≤ 6°
(2) 6° ≤ θ ≤ 7,5°
(3) 7,5° ≤ θ ≤ 29,5°
(4) 29,5° ≤ θ ≤ 32°
(5) 32° ≤ θ ≤ 67,5°
(6) 87,5° ≤ θ ≤ 90°
m*
x

Nous voyons apparaître de nombreux extrema de $m^{\parallel}(x)$ pouvant donner des raies observables. Remarquons que ces raies seront d'autant plus intenses que les extrema seront moins pointus; en effet la densité restera alors grande au voisinage de l'extremum. Ainsi, les deux extrema de trous lourds apparaissant dans la région (2), l'extremum supérieur à $m^{\parallel}_{-}(\infty)$ des régions (3), (4) et même dans une certaine mesure celui de la région (5), qui proviennent de divergences de $m^{\parallel}_{-}$ dans les régions voisines, sont probablement assez difficiles à observer (tous ces extrema sont très sensibles à l'orientation, et peuvent aussi apparaitre dans les régions (1) et (6) si B est légèrement désorienté par rapport au plan (110); la raie voisine de $0{,}6\ m_o$ observée par Fletcher, Yager et Merritt [36] dans la direction [100] est peut être de ce type). Par contre l'extremum de trous lourds inférieur à $m^{\parallel}_{-}(\infty)$, apparaissant dans la région (4) et présent jusqu'à la région (6) (c'est celui qui correspond à la masse de $0{,}265\ m_o$ dans la direction [110] calculée par Baggaley et Stradling [42]) doit être plus facile à observer ce qui est confirmé par l'expérience (voir § V.3). Quant à l'extremum de trous légers de la petite région (4), il est sans doute très voisin de $m^{\parallel}_{+}(\infty)$, ce qui le rend difficile à distinguer; tout au plus peut-on prévoir une raie plus intense et plus symétrique vers $\theta = 30°$.

Tableau I

Correspondance entre les coefficients

$(A, B, C)$ , $(F, G, H_1, H_2)$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, K)$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{3}(F + 2G + H_1 + H_2) + 1 & = \gamma_1 \\ B = \frac{1}{3}(F + 2G - H_1 - H_2) & = -2\gamma_2 \\ C^2 = \frac{1}{3}\left[(F - G + H_1 - H_2)^2 - (F + 2G - H_1 - H_2)^2\right] & = 12(\gamma_3^2 - \gamma_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = \frac{1}{3}\left[A + 4B + 1 - 2(3C^2 + 9B^2)^{1/2} + 4H_2\right] & = -\frac{1}{3}(\gamma_1 + 4\gamma_2 + 6\gamma_3 + 6K + 3) \\ G = \frac{1}{3}\left[-2A + B - 2 + (3C^2 + 9B^2)^{1/2} - 2H_2\right] & = -\frac{1}{3}(\gamma_1 + 4\gamma_2 - 3\gamma_3 - 3K) \\ H_1 = -A - B - 1 - H_2 & = -\frac{1}{2}(\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 - 3K) \\ H_2 = & = -\frac{1}{2}(\gamma_1 - 2\gamma_2 - 3\gamma_3 + 3K + 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = A & = -\frac{1}{3}(F + 2G + H_1 + H_2) \\ \gamma_2 = -\frac{B}{2} & = -\frac{1}{6}(F + 2G - H_1 - H_2) \\ \gamma_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{3} + B^2\right)^{1/2} & = -\frac{1}{6}(F - G + H_1 - H_2) \\ K = & = -\frac{1}{6}(F - G - H_1 + H_2) - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Tableau II

| Référence | A | -B | \|C\| | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ | $K^{(\neq)}$ | Remarques |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dresselhaus et al.[4] | 13,0±0,2 | 8,3±0,1 | 10,3±0,2 | 13 | 4,45 | 5,70 | 3,67 | Sans tenir compte de $p_z \neq 0$ |
| | 13,2±0,1 | 8,1±0,05 | 10,6±0,2 | 13,2 | 4,45 | 5,4 | 3,30 | En tenant compte de $p_z \neq 0$ |
| Dexter et al.[5] | 13,1±0,4 | 8,3±0,6 | 12,5±0,5 | 13,1 | 4,15 | 5,5 | 3,23 | |
| Fletcher et al.[36] | 13,2 | 8 | 10,5 | 13,2 | 4,5 | 5,43 | 3,56 | D'après les résultats de Fletcher et al.[41] |
| Bagguley et al.[41] | 13,1 | 8,2 | 10,0 | 13,1 | 4,6 | 5,55 | 3,73 | Pour l'échantillon le plus pur étudié |
| Bagguley et al.[43] | 13,2 | 8,7 | 11,6 | 13,2 | 4,35 | 5,6 | 3,44 | Valeurs précédentes modifiées pour faire apparaître une raie due à $p_z \neq 0$ dans la direction [111] |
| Goodman[27] | 13,2 | 8,2 | 13,2 | 13,2 | 4,1 | 5,6 | 3,9 | Coefficients choisis de manière à retrouver certaines des raies observées par Fletcher et al.[36] |
| Roth et al.[26] | 13,245 | 8,4 | 12,64 | 13,245 | 4,20 | 5,55 | 3,27 | Dérivés des coefficients de Dexter et al.[5] en les augmentant de 1,11% pour interpréter des expériences d'absorption magnéto-optiques |
| Mercouroff | 13,21±0,05 | 8,74±0,12 | 11,8±0,3 | 13,21±0,05 | 4,37±0,06 | 5,41±0,03 | 3,3±0,1 | |

(≠) Les valeurs de (A B C) et ($\gamma_1$ $\gamma_2$ $\gamma_3$) sont reliées entre elles par les relations du Tableau I.

La valeur de $K$ est déterminée en supposant que $H_2 = 0$ , d'où $K = \frac{1}{3}(-\gamma_1 + 2\gamma_2 + 3\gamma_3 - 2)$

## BIBLIOGRAPHIE


(1) J.DORFMAN, Doklady Akad.Nauk S.S.S.R., 81, 765 (1951)

(2) R.B.DINGLE, Proc. Roy.Soc. A 212, 38 (1952)

(3) W.SHOCKLEY, Phys.Rev. 90 , 491 (1953)

(4) G.DRESSELHAUS, A.F.KIP and C.KITTEL, Phys.Rev., 98, 368 (1955)

(5) R.N.DEXTER, H.J.ZEIGER and B.LAX, Phys.Rev., 104, 637 (1956)

(6) B.LAX and J.G.MAVROIDES - Solid State Physics, vol.11, p.261; Seitz et Turnbull Editors, Academic Press (1960)

(7) B.LAX, H.J.ZEIGER and R.N.DEXTER, Physica, 20, 818 (1954)

(8) W.SHOCKLEY, Phys.Rev., 79, 191 (1950)

(9) J.M.LUTTINGER and R.R.GOODMAN, Phys.Rev., 100, 673 (1955)

(10) LANDAU et LIFSCHITZ - Mécanique; Editions en Langues étrangères; Moscou (1960)

(11) Yu KAGAN, Soviet Physics J.E.T.P., 11, 1333 (1960)

(12) F.J.BLATT - Solid State Physics, vol.4 , p.199; Seitz and Turnbull Editors; Academic Press (1957)

(13) G.DRESSELHAUS, A.F.KIP and C.KITTEL, Phys.Rev., 100, 618 (1955)

(14) H.FRÖHLICH and B.V.PARANJAPE, Proc.Phys.Soc., B 69, 21 et 866 (1956)

(15) J.BOK, Thèse de Doctorat d'Etat, Gauthier-Villars (1960)

(16) F.HERMAN, Physica, 20, 801 (1954)

(17) W.SHOCKLEY, Phys.Rev., 78, 173 (1950)

(18) E.O.KANE, J.Phys.Chem.of Solids, 1 , 82 (1956)

(19) H.J.ZEIGER, B.LAX and R.N.DEXTER, Phys.Rev., 105, 495 (1957).

(20) Yu FIRSOV, Soviet Phys. Solid State, 1, 1, 42 (1959)

(21) G.E.ZILBERMAN, Soviet Phys.J.E.T.P. , 5, 208 (1957)

(22) H.KRÖMER, Proc.IRE, 47, 397 (1959)

(23) G.C.DOUSMANIS, R.C.DUNCAN Jr., J.J.THOMAS, R.C.WILLIAMS in Proceedings of the International Conference on Semiconductor Physics, Prague (1960) (Publishing House, Czechoslovakian Academy of Science, Prague (1961) p.606

G.C.DOUSMANIS, R.C.DUNCAN, J.J.THOMAS and R.C.WILLIAMS, Phys.Rev.Letters 1, 404 (1958)

(24) J.M.LUTTINGER and W.KOHN , Phys.Rev., 97, 869 (1955)

(25) J.M.LUTTINGER, Phys.Rev., 102, 1030 (1956)

(26) L.M.ROTH, B.LAX and S.ZWERDLING, Phys.Rev., 114, 90 (1959)

(27) R.GOODMAN, Phys.Rev.122, 397 (1961)

(28) J.C.HENSEL and H.FEHER, Phys.Rev., 114, 411 (1959)

(29) R.F.WALLIS and H.J.BOWDEN, Phys.Rev. 118, 456 (1960)

(30) V.EVTUHOV, C.I.T. Techn.Report n° 16 (1960); Phys. Rev., 125, 1869 (1962)

(31) P.AIGRAIN, Ann.Radioelectricité, 31, 44 (1954)

(32) Table 1958 des tensions de vapeur saturante de He 4 - Voir par exemple G.K.WHITE, Experimental Techniques in Low-temperature Physics, Clarendon Press, Oxford (1959)

(33) [illegible], W.A.YAGER, F.R.MERRITT, B.B.GILLAM and H.W.DAIL Jr., Phys.Rev. Letters, 100, 748 (1955)

(34) [illegible], C.R.Acad.Sci., 252, 2510 (1960)

(35) A.BLANC-LAPIERRE et B.PICINBONO, Propriétés statistiques du bruit de fond Masson et Cie (1961)

A.VAN der ZIEL, Noise, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1954)

(36) R.C.FLETCHER, W.A.YAGER and F.R.MERRITT, Phys.Rev. 100, 747 (1955)

(37) J.C.HENSEL, Bull.Amer.Phys.Soc., 20 mars 1961

(38) W.MERCOUROFF, C.R.Acad.Sci., 253, 2502 (1961)

W.MERCOUROFF, Physica Status Solidi, 2, 282 (1962)

(39) R.C.FLETCHER, F.R.MERRITT and W.A.YAGER, Phys.Rev., 97, 1560 (A) (1955)

(40) H.KROEMER, Bull.Amer.Phys.Soc., 20 Mars 1961

(41) D.M.S.BAGGULEY, R.A.STRADLING and J.S.S.WHITING, Proc.Roy.Soc., A262, 340 (1961)

(42) J.C.HENSEL and G.FEHER , Phys.Rev.Letters, 5, 307 (1960)

(43) D.M.S.BAGGULEY and R.A.STRADLING, Proc.Phys.Soc., B78, 1078 (1961)

(44) B.LAX, Quantum Electronics, Ed.C.H.Townes, Columbia University Press N.Y., 1960

# DEUXIÈME THÈSE

**Propositions données par la Faculté**

# « EFFETS GÉOPHYSIQUES DES EXPLOSIONS NUCLÉAIRES A HAUTE ALTITUDE »

Vu et approuvé :

Paris, le 24 Mai 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

**Marc ZAMANSKY.**

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

**Jean ROCHE.**

DEUXIEME THÈSE

Propositions données par la Faculté

« EFFETS GÉOPHYSIQUES
DES EXPLOSIONS NUCLÉAIRES A HAUTE ALTITUDE »